目　录

基础平台

应用模块

基础平台

第一章 函数

函数是高等数学主要研究的对象，在自然科学、工程技术和经济学中都有广泛的应用. 本章将介绍函数的概念、函数关系的构建与函数的特性.

数学思想方法，就是指现实世界的空间形式和数量关系反映到人的意识中，经过思维活动而产生的结果. 它是对数学事实与数学理论(概念、定理、公式、法则等)的本质认识，也是对数学规律的理性认识，是从某些具体的数学内容和数学的认识过程中提炼上升的数学观点，是建立数学和用数学解决问题的指导思想，是知识化为能力的桥梁，是学生形成认知结构的纽带，是培养数学观念、促成创造思维的关键，是数学的灵魂和精髓.

§1.1 函数的概念

一、函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

某一自然现象或社会现象中，往往同时存在多个不断变化的量(变量)，这些变量并不是孤立变化的，而是相互联系并遵循一定的规律. 函数就是描述这种联系的一个法则.

例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s. 假定开始下落的时刻为 $t=0$，则变量 s 与 t 之间的相依关系由数学模型

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定，其中 g 是重力加速度.

定义 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有唯一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x), x\in D,$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为这个函数的定义域.

对 $x_0\in D$，按照对应法则 f，总有确定的值 y_0(记为 $f(x_0)$)与之对应，称 $f(x_0)$ 为函数

在点 x_0 处的函数值. 因变量与自变量的这种相依关系通常称为函数关系.

当自变量 x 遍取 D 的所有数值时,对应的函数值 $f(x)$的全体构成的集合称为函数 $f(x)$的值域,记为 W 或 $f(D)$,即

$$W=f(D)=\{y \mid y=f(x), x\in D\}.$$

注:函数的定义域与对应法则称为函数的两个要素. 两个函数相同的充分必要条件是它们的定义域和对应法则均相同.

如果函数的解析式能写成 $y=f(x)$,则称该函数为显函数. 例如 $y=\sin x$, $y=\ln x$ 等.

如果在方程 $F(x,y)=0$ 中,当 x 在某一区间内取任意一个值,相应地总有满足该方程的唯一的 y 值存在,从而确定一个函数 $y=f(x)$[使 $F(x,f(x))\equiv 0$],则称 $y=f(x)$是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数.

有些隐函数可以化为显函数,如 $x+y^3-1=0$ 可化为 $y=\sqrt[3]{1-x}$;有些隐函数难以化为显函数,如 $xy+\ln y=1$.

二、函数的定义域及函数值

我们知道,圆的面积 S 是半径 r 的函数,即 $S=\pi r^2$, $r\in(0,+\infty)$,其中 $X=\{r \mid 0<r<+\infty\}$就是这一函数 $S(r)$的定义域. 如果单看解析式 $S=\pi r^2$,而不考虑其实际意义,该函数的定义域为 $X=\{r \mid -\infty<r<+\infty\}$.

一般地,当 $f(x)$用 x 的表达式给出时,如果没有特别声明,那么函数的定义域就是使 $f(x)$有意义的全体 x 的集合,这样所确定的定义域通常称为自然定义域. 考虑 $f(x)$的表达式的实际意义而得出的定义域为实际定义域.

例 1 求函数的定义域:

(1) $f(x)=\sqrt{16-x^2}+\dfrac{1}{x-3}$;

(2) $\varphi(x)=\ln(3x-2)+\arccos x$.

解 (1)要使 $\sqrt{16-x^2}$ 与 $\dfrac{1}{x-3}$ 同时有意义,应满足 $16-x^2\geqslant 0$ 且 $x-3\neq 0$,即 $|x|\leqslant 4$ 且 $x\neq 3$,其定义域为 $\{x \mid -4\leqslant x<3\}\cup\{x \mid 3<x\leqslant 4\}$,如图 1-1 所示.

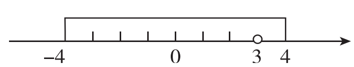


图 1-1

(2)要使 $\ln(3x-2)$与 $\arccos x$ 同时有意义,应满足 $3x-2>0$ 且 $-1\leqslant x\leqslant 1$,即 $x>\dfrac{2}{3}$ 且 $-1\leqslant x\leqslant 1$,故定义域为 $\left\{x \,\middle|\, \dfrac{2}{3}<x\leqslant 1\right\}$,如图 1-2 所示.

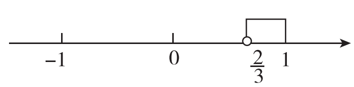


图 1-2

例 2 已知 $f(x)=x^3$，求 $f(-1)$，$f(1)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$，$f(x+1)$.

解 $f(-1)=(-1)^3=-1$；

$f(1)=1^3=1$；

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^3$；

$f(x+1)=(x+1)^3$.

例 3 已知 $f(x+1)=\frac{3x}{1-x}$，要求：

(1)写出 $f(x)$的表达式；

(2)确定 $f(x)$的定义域；

(3)求 $f[f(x)]$.

解 (1)令 $x+1=\mu$，$\therefore x=\mu-1$，

$\therefore f(\mu)=\frac{3(\mu-1)}{2-\mu}$，

$\therefore f(x)=\frac{3(x-1)}{2-x}=\frac{3x-3}{2-x}$.

(2)定义域为 $X=\{x|x\neq 2\}=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

(3)$f[f(x)]=\dfrac{3\,\dfrac{3x-3}{2-x}-3}{2-\dfrac{3x-3}{2-x}}=\dfrac{\dfrac{9x-9-6+3x}{2-x}}{\dfrac{4-2x-3x+3}{2-x}}=\dfrac{12x-15}{7-5x}$.

练习题 1.1

1. 求下列函数的定义域：

(1)$y=\sqrt{x^2-2}$；　　(2)$y=\frac{\sqrt{x+3}}{x}$；

(3)$y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　　(4)$y=\frac{1}{\lg(2x-1)}$；

(5)$y=\sqrt{\ln(3x-2)}$；　　(6)$y=\arcsin\frac{x-1}{2}$.

2. 已知 $f(x)=x^3-2x+4$，求 $f(0)$，$f(-x)$.

3. 已知 $f(x)=\frac{1}{2x+1}$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(-2)$，$f(a)$.

4. $f(x)=\frac{x}{1-x}$，求 $f[f(x)]$.

§1.2 函数的基本性质

一、函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称.若 $\forall x\in D$,恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$为偶函数;若 $\forall x\in D$,恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$为奇函数.

偶函数的图像是关于 y 轴对称的(图 1-3).奇函数的图像是关于原点对称的(图 1-4).

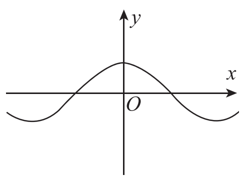


图 1-3

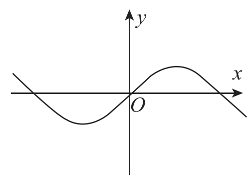


图 1-4

例如:函数 $y=\cos x$ 是偶函数;函数 $y=\sin x$ 是奇函数.

例 判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的奇偶性.

解 因为函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\\&=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x).\end{aligned}$$

所以 $f(x)$为奇函数.

二、函数的单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subseteq D$.如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调递增函数;如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调递减函数.

例如,$y=x^2$ 在$[0,+\infty)$内是单调递增的,在$(-\infty,0]$内是单调递减的,在$(-\infty,$

$+\infty$)内不是单调的(图 1－5). $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调递增的(图 1－6).

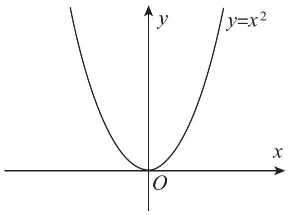


图 1－5

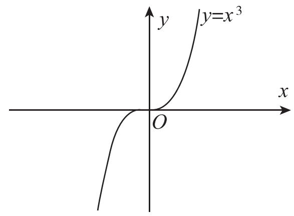


图 1－6

三、函数的有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,数集 $X\subset D$,若存在一个正数 M,使得对一切 $x\in X$,恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在 X 上有界,或称 $f(x)$是 X 上的有界函数,否则称 $f(x)$在 X 上无界,或称 $f(x)$是 X 上的无界函数.

例如,函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界,因为对任何实数 x,恒有$|\sin x|\leqslant 1$. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$上无界,因为可以取无限靠近于零的数,使该函数的绝对值$\left|\dfrac{1}{x}\right|$大于任何预先给定的正数$M$,但该函数在$[1,+\infty)$上有界.

四、函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在不为零的常数 T,使得对一切 $x\in D$,有$(x+T)\in D$,且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$为周期函数,T 称为 $f(x)$的周期.

通常周期函数的周期是指其最小正周期. 但并非每个周期函数都有最小正周期.

例如,$\sin x$、$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数. 函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数. 常函数为周期函数,任意非零实数为其周期,无最小正周期.

练习题 1. 2

1. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;　　(2) $y=\lg(x^2+1)$;

(3) $y=x^2\sin x$;　　(4) $f(x)=x^5+4x^3-2x$.

2. 考察 $y=x^2-3x+2$ 的单调性.

3. 判断 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1]$上的有界性.

4. 判断下列函数是否为周期函数,如果是,指出其周期.

（1）$y=\cos(x-1)$；　　（2）$y=\sin^2 x$；　　（3）$y=\sin 2x$.

§1.3 初等函数

一、基本初等函数

幂函数　$y=x^{\mu}$（μ 为任意实数）；

指数函数　$y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）；

对数函数　$y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）；

三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 等；

反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$ 等.

以上五类函数统称为基本初等函数. 为了便于以后的应用，我们再作简单复述.

1. 幂函数

幂函数 $y=x^{\mu}$ 的定义域 D 随 μ 值而定，但无论 μ 为何值，总有 $D\supset(0,+\infty)$，图形都经过点(1,1).

$y=x^{\mu}$ 中，$\mu=1,2,3,\dfrac{1}{2},-1$ 时最常见，它们的图形如图 1－7 所示.

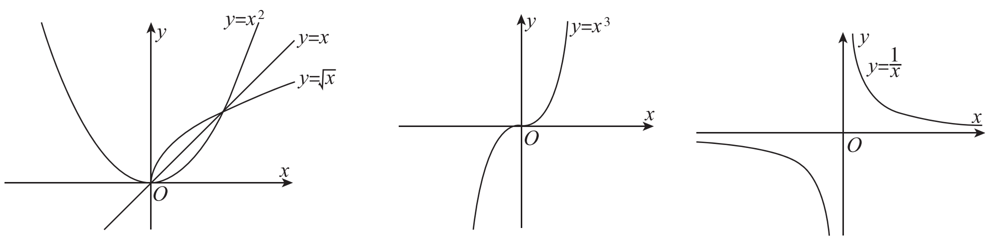


图 1－7

2. 指数函数

指数函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）的定义域为$(-\infty,+\infty)$，图形都在 x 轴上方且过点(0,1).

若 $a>1$，则指数函数 $y=a^x$ 是单调递增的.

若 $0<a<1$，则指数函数 $y=a^x$ 是单调递减的.

由于 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$，所以 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ 的图形与 $y=a^x$ 的图形关于 y 轴对称(图 1－8).

以常数 e＝2.7182818…为底的指数函数 $y=e^x$ 是科技中常用的指数函数.

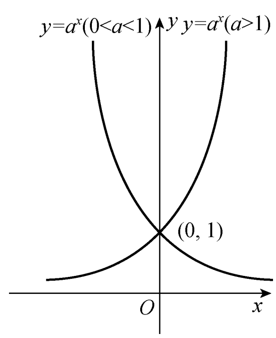


图 1－8

3. 对数函数

对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）的定义域为$(0,+\infty)$，图形都在 y 轴右方且经过点(1,0).

若 $a>1$，则对数函数 $\log_a x$ 是单调递增的，在开区间(0,1)内函数值为负，而在区间

$(1,+\infty)$内函数值为正.

若 $0<a<1$,则对数函数 $\log_a x$ 是单调递减的,在开区间$(0,1)$内函数值为正,而在区间$(1,+\infty)$内函数值为负.

对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数,它们的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1-9).

科技中常把以常数 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$ 称为自然对数,简记为 $y=\ln x$.

对数函数中,当 $a=10$ 时,称为常用对数,记为 $\lg x$,即 $\lg x=\log_{10}x$.

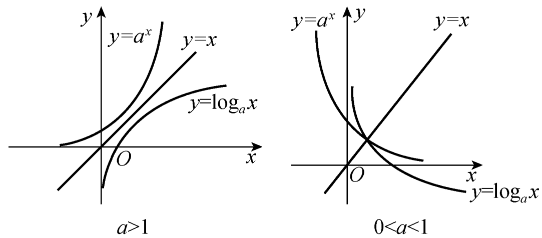


图 1-9

数形结合思想

所谓数形结合思想,就是根据数与形之间的对应关系,通过数与形的相互转化来解决数学问题的思想.

数形结合的应用大致可分为两种情形:借助于数的精确性来阐明形的某些属性,借助形的几何直观性来阐明数之间某种关系.

数形结合包括两个方面:第一种情形是“以数解形”,而第二种情形是“以形助数”.

数形结合主要有三种类型:以“数”化“形”、以“形”变“数”和“数”“形”结合.

华罗庚教授对此有精辟概述:“数无形,少直观;形无数,难入微.”

4. 三角函数

这一类函数有六个:

正弦函数　$y=\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$;

余弦函数　$y=\cos x, x\in(-\infty,+\infty)$;

正切函数　$y=\tan x, x\in\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$;

余切函数　$y=\cot x, x\in\{x\,|\,x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$;

正割函数　$y=\sec x, x\in\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$;

余割函数　$y=\csc x, x\in\{x\,|\,x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$.

其中自变量单位均以弧度来表示.

正弦函数和余弦函数都是以 2π 为周期的周期有界函数,正弦函数是奇函数,余弦函数是偶函数(图 1-10).

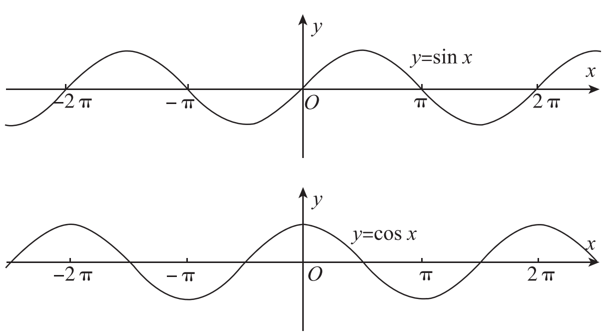


图 1-10

正切函数和余切函数都是以 π 为周期的周期函数，它们都是奇函数且无界(图 1－11).

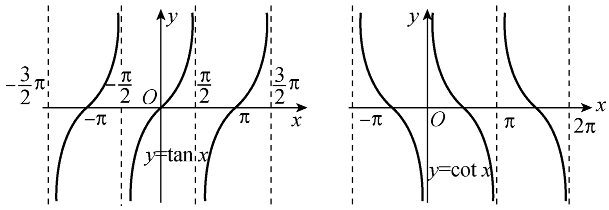


图 1－11

此外，$\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

5. 反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x$，定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$；

反余弦函数 $y=\arccos x$，定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$；

反正切函数 $y=\arctan x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$[图 1－12(a)]；

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$[图 1－12(b)].

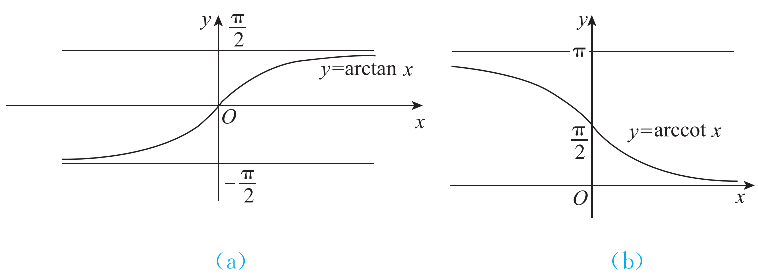


图 1－12

二、简单函数

定义 1 由五类基本初等函数经过加减乘除四则运算而得的函数称为简单函数.

常见的简单函数为单项式函数 $y=cx^n$，多项式函数 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$，$y=\dfrac{\sin x}{x}$，$y=xe^x$，$y=c+\ln x$ 等.

三、反函数

定义 2 给定函数 $y=f(x)(x\in X,y\in Y)$，若对于 Y 中的每一个值 y，在 X 中都有唯一的 $x\in X$ 与 y 对应，即，使 $f(x)=y$，则在 Y 上确定了 $y=f(x)$的反函数，记作：$x=f^{-1}(y)(y\in Y)$，即 f^{-1}：$y\to x$.

习惯上，把 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$记作 $y=f^{-1}(x)$，从而 $y=f^{-1}(x)$的定义域是 $y=f(x)$的值域，$y=f^{-1}(x)$的值域是 $y=f(x)$的定义域，且反函数 $y=f^{-1}(x)$与 $y=f(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例如，$y=2x+1$ 是定义在 R 上的单调函数，所以是单射，于是其反函数必定存在. 由 $y=2x+1$可得 $x=\frac{y-1}{2}$，故其反函数为 $y=\frac{x-1}{2}(x\in R)$. $y=x^2+3$ 是定义在 R 上的函数，因为在 R 上不单调，所以不是单射，故它没有反函数. 但对 $y=x^2$，$x\in(0,+\infty)$或 $x\in(-\infty,0)$时，其反函数是存在的，且分别为 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=-\sqrt{x}$.

一般地，对于给定的函数 $y=f(x)(x\in X, y\in Y)$，它在 X 上有反函数的充分条件是 $f(x)$在 X 上是单调函数.

再如：$y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$是单调递增函数，则有反函数，且反函数为 $y=\arcsin x$，其定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. 同理，$y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上是单调递减的，所以也有反函数，且反函数为 $y=\arccos x$，其定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$；$y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内单调，故有反函数 $y=\arctan x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

四、复合函数

在现实经济活动中，我们会遇到这样的问题：一般来说，成本 C 可以看作产量 g 的函数，而产量 g 又是时间 t 的函数. 时间 t 通过产量 g 间接影响成本 C，那么成本 C 仍然可以看作时间 t 的函数. C 与 t 的函数关系是一种复合的函数关系.

复合函数

定义 3　如果对于函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，且函数 $\varphi(x)$的值的全部或部分包含在函数 $f(u)$的定义域内，那么 y 通过 u 的联系构成 x 的函数，该函数称为 x 的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)].$$

其中，x 是 y 的最终自变量，u 叫作中间变量，又是 y 的自变量。$f(u)$叫作外层函数，$\varphi(x)$叫作内层函数.

复合函数的中间变量也可以推广到有限个的情形，即复合函数不仅可由两个函数，也可由多个函数相继复合而成.

例 1　试求函数 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 构成的复合函数.

解　将 $u=\cos x$ 代入 $y=u^2$ 中，即为所求的复合函数

$$y=\cos^2 x,$$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

例 2　指出下列复合函数的结构：

(1)$y=(3x+5)^8$；

(2)$y=\sqrt{\log_a(\sin x+3^x)}$；

(3)$y=5^{\cot\frac{1}{x}}$.

解　(1)$y=u^8$，$u=3x+5$；

(2)$y=\sqrt{u}$，$u=\log_a v$，$v=\sin x+3^x$；

(3) $y=5^u, u=\cot v, v=\dfrac{1}{x}$.

在应用复合函数这个概念时,重点不在"复合",而是在分解. 即通过中间变量,将复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 分解为基本初等函数或简单函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$,若 $u=\varphi(x)$ 仍然为复合函数,则可继续分解,若 $u=\varphi(x)$ 已经是基本初等函数或简单函数时,则分解终止.

将复合函数分解为基本初等函数或简单函数的一般方法是:由外层函数向内层函数分解,由最外层函数开始,层层向内进行,直到最终的函数形式是自变量 x 的基本初等函数或简单函数为止.

五、初等函数

定义 4 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成,并可用一个式子表示的函数则称为初等函数.

例如 $y=2\sqrt{\cos\dfrac{x}{2}}$, $y=\mathrm{e}^{\sin^2 x}+\sqrt{\cos x-1}$, $y=\sqrt{\ln(x-3)}$ 等都是初等函数.

练习题 1.3

1. 求下列初等函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x^2+5}$;　　(2) $y=\log_3 \lg x$.

2. 求由所给函数复合而成的函数:

(1) $y=\tan u, u=2x$;

(2) $y=\mathrm{e}^u, u=\sin v, v=x^2+1$.

3. 分解下列复合函数:

(1) $y=(3x+2)^{10}$;　　(2) $y=\sqrt{1-x^2}$;

(3) $y=10^{-x}$;　　(4) $y=2^{x^2}$;

(5) $y=\log_2(x^2+1)$;　　(6) $y=\sin 5x$;

(7) $y=\sin x^5$;　　(8) $y=\sin^5 x$;

(9) $y=\lg\lg\lg x$;　　(10) $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$.

4. 求下列函数的反函数:

(1) $y=2x+1$;　　(2) $y=x^3+2$.

§ 1.4 分段函数

函数一般可以分成两大类,一类是初等函数,另一类是非初等函数. 非初等函数又有

各种各样的形式，其中最简单且最常用的是分段函数.

通常，我们把定义域的有限个各不相交的区间上，由不同解析式表示函数关系的函数称为分段函数. 其中定义域的有限个各不相交的区间称为分段区间，分段区间的公共端点称为分段函数的分段点.

如：$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ x, & x\leqslant 0\end{cases}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$；

$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

例 1　普通客车票价按如下规定计算，不超过 100 公里的里程每公里 a 元，超过 100 公里的部分每公里 b 元，试建立票价 P 与里程 x 之间的函数关系.

解　由题意，票价 P 与里程 x 的关系用分段函数表示为：

$$P=\begin{cases}ax, & 0<x\leqslant 100,\\ 100a+b(x-100), & x>100.\end{cases}$$

例 2　设函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\geqslant 0,\\ 2-x, & x<0,\end{cases}$ 求 $f[f(3)]$.

解　由题意，$f[f(3)]=f(1-3)=f(-2)=2-(-2)=4$.

练习题 1.4

1. 作出 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 的图形并求其定义域和值域.

2. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ 1+x, & 1<|x|\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f\left(\frac{3}{2}\right)$.

3. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3},\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，$\varphi(-3)$.

4. 已知 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1,\end{cases}$ 求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 及 $f\left(\frac{1}{t}\right)$，并写出定义域及值域.

5. 判断 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0,\\ 1+x, & x>0\end{cases}$ 的奇偶性.

6. 一个快餐联营公司在某地区开设了 40 个营业点，每个营业点每天的平均营业额达 10 000 元. 对在该地区是否开设新营业点的研究表明，每开设一个新营业点，会使每个营业点的平均营业额减少 200 元，求在该公司所有营业点的每日总收入和新开设营业点数目之间的函数关系.

§ 1.5 函数模型实例

数学模型是指对于现实世界的某一特定对象，为了某个特定的目的，做出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具得到一个数学结构.

数学结构是指数学符号、数学关系式、数学命题、图形图表等这些基于数学思想与方法的数学问题.

研究数学模型，建立数学模型，进而借鉴数学模型，对提高解决实际问题的能力，以及数学素养是十分重要的. 建立数学模型的步骤如下：

(1)审题：弄清题意，分清条件和结论，理顺数量关系.

(2)建模：将文字语言转化成数学语言，用数学知识建立相应的数学模型.

(3)求模：求解数学模型，得到数学结论.

(4)还原：将用数学方法得到的结论还原为实际问题的意义.

例 1 重力为 P 的物体置于地平面上，设有一与水平方向成 α 角的拉力 F，使物体由静止开始移动，求物体开始移动时拉力 F 与角 α 之间的函数关系.

解 由物理知识可知，当水平拉力与摩擦力平衡时，物体开始移动，而摩擦力是与正压力 $P-F\sin\alpha$ 成正比的，设摩擦系数为 u，故有：

$$F\cos\alpha=u(P-F\sin\alpha),F=\frac{uP}{\cos\alpha+u\sin\alpha}\ (0^\circ\leqslant\alpha<90^\circ).$$

例 2 工厂的某种机器的价格大约每 3 年下降$\frac{2}{3}$，那么今年花 8 100 元买的机器，9 年后的价格大约是多少元.

解 设机器价格平均每年下降 $p\%$，

由题意可得

$$\frac{1}{3}=(1-p\%)^3,$$

$$\therefore p\%=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$\therefore$ 9 年后的价格

$$y=8\ 100\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]^9=8\ 100\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=300(\text{元})$$

例 3 在固定电压差(电压差为常数)下，当电流通过圆柱体电线时，电流强度 I 与电线横截面半径 r 的三次方成正比.

(1)写出函数解析式；

(2)若电流通过半径为 4 毫米的电线时，电流强度为 320 安，求电流通过半径为 r 毫米的电线时，其电流强度的表达式；

(3)已知(2)中的电流通过的电线半径为 5 毫米，计算该电流的强度.

解 (1)$I=kr^3$(k 为常数).

(2)由(1)知:$320=k\times4^3$,

解得:$k=5$.

所以,电流通过半径为 r 毫米的电线时,其电流强度的表达式为 $I=5r^3$.

(3)由(2)中电流强度的表达式,将 $r=5$ 代入得:

$I=5\times5^3=625$(安).

例 4　某产品的总成本 y(万元)与产量 x(台)之间的函数关系是 $y=3\,000+20x-0.1x^2(0<x<240,x\in\mathbf{N}^*)$,若每台产品的售价为 25 万元,则生产者不亏本时(销售收入不小于总成本)的最低产量是多少?

解　设利润为 $f(x)$(万元),

则 $f(x)=25x-(3\,000+20x-0.1x^2)$

$=0.1x^2+5x-3\,000\geqslant0$,

$\therefore x\geqslant150$.

例 5　某工厂今年 1 月、2 月、3 月生产某种产品的数量分别为 1 万件、1.2 万件、1.3 万件,为了估计以后每个月的产量,以这三个月的产品数量为依据,用一个函数模拟该产品的月产量 y 与月份 x 的关系,模拟函数可以选用二次函数或函数 $y=ab^x+c$(其中 a,b,c 为常数).已知 4 月份该产品的产量为 1.37 万件,用以上哪个函数作为模拟函数较好?请说明理由.

分析　此题想判断哪个函数最好,可以先通过前三个月给出的条件,确定两种模拟函数中参数的值,再根据 4 月份的产量,比较哪个函数值更接近 1.37 万件.

解　设 $y_1=f(x)=px^2+qx+r(p\neq0)$,则

$$f(1)=p+q+r=1,$$
$$f(2)=4p+2q+r=1.2,$$
$$f(3)=9p+3q+r=1.3.$$

解得 $p=-0.05,q=0.35,r=0.7$.

$\therefore f(4)=-0.05\times4^2+0.35\times4+0.7=1.3$,

再设 $y_2=g(x)=ab^x+c(a\neq0,b>0,b\neq1)$,则

$$g(1)=ab+c=1,$$
$$g(2)=ab^2+c=1.2,$$
$$g(3)=ab^3+c=1.3.$$

解得 $a=-0.8,b=0.5,c=1.4$.

$\therefore g(4)=-0.8\times0.5^4+1.4=1.35$.

经比较可知,用 $y=-0.8\times0.5^x+1.4$ 作为模拟函数较好.

例 6　一辆汽车在某段路程中的行驶速度与时间的关系如图 1-13 所示:

(1)求图中阴影部分的面积,并说明所求面积的实际含义;

(2)假设这辆汽车的里程表在汽车行驶这段路程前的读数为 2 004 km,试建立汽车行驶这段路程中汽车里程表读数 s(单位:km)与时间 t(单位:h)的函数解析式,并作出相应的图像.

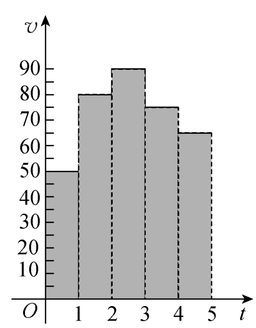


图 1-13

解　(1)阴影部分的面积为：

$50\times1+80\times1+90\times1+75\times1+65\times1=360.$

阴影部分的面积表示汽车在这 5 小时内行驶的路程为 360 km.

(2)根据图形可得：

$$s=\begin{cases}50t+2\,004, & 0\leqslant t<1,\\ 80(t-1)+2\,054, & 1\leqslant t<2,\\ 90(t-2)+2\,134, & 2\leqslant t<3,\\ 75(t-3)+2\,224, & 3\leqslant t<4,\\ 65(t-4)+2\,299, & 4\leqslant t\leqslant 5.\end{cases}$$

这个函数的图像如图 1-14 所示.

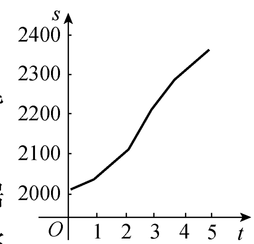


图 1-14

在“数学建模”中要注意下列几个问题：

(1)理解题目：阅读题目，读懂文字叙述，认真审题，理解实际背景，弄清楚问题的实际背景和意义，设法用数学语言来描述问题.

(2)数学建模：把握新信息，勇于探索，善于联想，灵活化归，根据题意建立变量或参数间的数学关系，实现实际问题数学化，引进数学符号，构建数学模型，常用的数学模型有方程、不等式、函数等.

(3)求解模型：以所学的数学知识为工具对建立的数学模型进行求解.

(4)检验模型：将所求的结果代回模型中检验，对模拟的结果与实际情形比较，以确定模型的有效性. 如果不满意，要考虑重新建模.

(5)评价与应用：如果模型与实际情形比较吻合，要对计算的结果作出解释并给出其实际意义，最后对所建立的模型给出运用范围. 如果模型与实际问题有较大出入，则要对模型改进，并重复上述步骤.

练习题 1.5

1. 1982 年底，我国人口为 10.3 亿人，如果不实行计划生育政策，按照年均 2%的自然增长率计算，那么到 2000 年底，全国人口将是多少？若人口基数为 p，人口增长率为 r，你能建立一个人口模型吗？

2. 某种商品进货单价为 40 元，按单价 50 元售出，每天能卖出 50 个. 如果零售价在 50 元的基础上每上涨 1 元，其销售量就减少 1 个. 零售价上涨到多少元时，每天能获得最高利润？

基础训练

一、选择题

1. $y=\lg(x+1)+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}+\arccos x$ 的定义域是(　　).

A. $(-1,+\infty)$　　B. $(-1,1]$　　C. $(-1,1)$

2. 设 $f(x)$是二次多项式，$f(0)=4$，$f(1)=2$，$f(2)=1$，则 $f(x)=$(　　).

A. $\dfrac{1}{2}(x^2-5x+8)$　　B. $\dfrac{1}{2}(x^2+x-4)$　　C. $\dfrac{1}{2}(x^2-4x+8)$

3. 下列函数中，$f(x)$与 $g(x)$相同的是(　　).

A. $f(x)=\cos\arccos x$，$g(x)=x$，其中$|x|\leqslant 1$

B. $f(x)=x-3$，$g(x)=\sqrt{(x-3)^2}$

C. $f(x)=\lg\dfrac{x-1}{x+1}$，$g(x)=\lg(x-1)-\lg(x+1)$

4. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=1-x$，则 $f[g(x)]=$(　　).

A. $1-\dfrac{1}{x}$　　B. $1+\dfrac{1}{x}$　　C. $\dfrac{1}{1-x}$

二、填空题

1. 设 $f(3x)=2x+1$，$f(a)=5$，则 $a=$________.

2. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $f[f(x)]=$________.

3. 设 $f(x)=x^3+1$，则 $f(x^2)=$________.

4. 设 $f(x)=4x+3$，则 $f[f(x)-2]=$________.

5. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+3$，则 $f(x)=$________.

6. 设 $f\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\dfrac{x}{2x-1}$，则 $f(x)=$________.

三、求下列函数的定义域

1. $y=\sqrt{2+x-x^2}$；

2. $y=\arcsin\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$；

3. $y=\dfrac{x}{\sin x}$；

4. $y=\dfrac{1}{\sqrt{(x-2)(x+3)}}+\lg[(x+1)(4-x)]$.

四、设 $f(x)=\arcsin x$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

五、将下列函数分解成若干个简单函数

1. $y=(4x+3)^3$；

2. $y=3^{\cos^2(2x+1)}$；

3. $y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^2$；

4. $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

六、判断函数 $y=\cos x+3$ 的奇偶性.

七、指出下列函数在指定区间内的单调性

1. $y=\sin 2x, x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$;　　2. $y=|x+1|\ (-5\leqslant x\leqslant -1)$.

八、指出下列函数哪些是周期函数,并求出周期

1. $y=\tan 2x$;　　2. $y=\sin x+\cos x$.

数学史话

本章内容精要

初中文凭,独步中华——华罗庚

华罗庚是20世纪中国最杰出的数学家.他于1910年11月12日出生于江苏省金坛县,1985年6月12日于日本东京病逝.因家境贫寒,他早年没有接受过系统的高等教育.他初中毕业后考取了上海中华职业学校,因拿不出50元的学费而中途辍学,回金坛帮助其父母经营"乾生泰"小店,同时刻苦自修数学.1930年他在上海的《科学》杂志上发表了一篇关于五次方程的文章而受到清华大学数学系主任熊庆来的注意.熊庆来认为华罗庚有培养前途.经熊庆来推荐,华罗庚于1931年到清华大学任数学系助理,1933年被破格提升为助教,一年后教微积分课.1934年华罗庚成为"中华文化教育基金会董事会"乙种研究员.1935年被提升为教员.1936年作为访问学者到英国剑桥大学进修.1938年应清华大学之聘任正教授,执教于西南联合大学.1946年2月至5月应苏联科学院与苏联对外文化协会的邀请对苏联作了广泛的访问.1946年7月赴美,他先在普林斯顿高级研究院作研究,后在普林斯顿大学教数论.1948年春在伊利诺伊大学任正教授.1950年2月回国,任清华大学数学系教授,并着手筹建中国科学院数学研究所.1952年华罗庚出任中国科学院数学研究所第一任所长.

华罗庚是享有国际盛誉的数学家,1978年他出任中国科学院副院长,1982年当选为美国科学院院士,1983年当选为第三世界科学院院士.

值得一提的是,华罗庚的文学水平极高,他写了不少诗文,并以诗歌的形式传授数学方法论.

数学实训（一）

1.1 数学软件 MATLAB 介绍

MATLAB 是美国 MathWorks 公司于 1984 年推出的一套高性能的数值分析和计算软件，它将矩阵运算、数值分析、图形处理、编程技术结合在一起，为用户提供了一个有很强的分析、计算和程序设计能力的工具. MATLAB 经受住了用户的多年考验，成为应用线性代数、自动控制理论、数理统计、数字信号处理、时间序列和分析动态系统仿真等高级课程的基本教学工具，及高端技能型人才必须掌握的基本软件. 在设计研究单位和工业部门，MATLAB 被广泛地用来研究和解决各种具体工程问题.

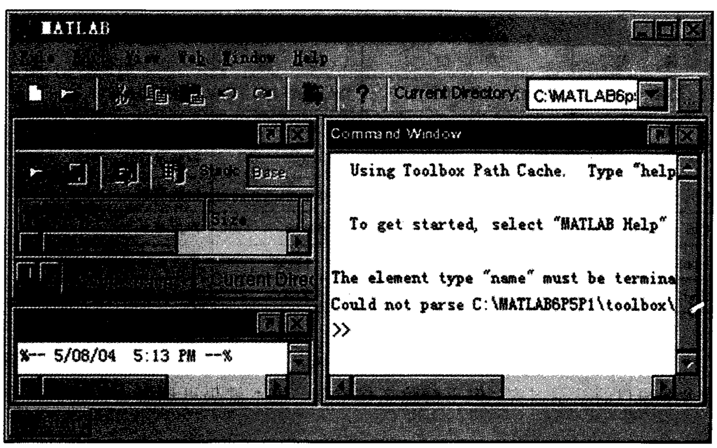
1.2 MATLAB 入门

一、启动、工作窗和指令行的操作

与一般的 Windows 程序一样，双击桌面上的 MATLAB 图标，即可启动 MATLAB 程序. 这时将看到如实训图 1－1 所示的 MATLAB 操作桌面.

操作桌面包括命令窗口（Command Window）、工作空间窗口（Workspace）、当前目录浏览器（Current Directory）、命令历史窗口（Command History）等窗口. 命令窗口用于输入 MATLAB 命令、函数、矩阵、表达式等信息，并显示除图形以外的所有计算结果，是 MATLAB 的主要交互窗口.

MATLAB 是一种交互式语言，输入命令即给出运算结果. 当命令窗口出现提示符>>时，表示 MATLAB 已准备好，可以输入命令、变量或运行函数.



实训图 1－1

案例 1:通过命令窗口直接输入,计算 $18+\dfrac{5\sin\frac{\pi}{6}}{2+\cos\frac{\pi}{6}}$.

在命令窗口中,只需输入:

```
>>18+(5*sin (pi/6))/(2+cos (pi/6))
```

按 Enter 键,就可以得到计算结果:ans=18.872 3.

如果将上式改为 $18+\dfrac{5\sin\frac{\pi}{3}}{2+\cos\frac{\pi}{3}}$,不必逐一重新输入,只需按一次 ↑ 键,调回已经输入的 18+(5*sin (pi/6))/(2+cos (pi/6)),将其中的 6 改为 3 即可.

除 ↑ 外,还有一些命令行功能键,见实训表 1-1。

实训表 1-1 常见的命令行功能键

按　键	功　能	按　键	功　能
↑,Ctrl—P	调出前一命令行	Esc	清除命令行
↓,Ctrl—N	调出后一命令行	Del,Ctrl—D	删除光标处字符
←,Ctrl—B	光标左移一个字符	Backspace	删除光标左边字符
→,Ctrl—F	光标右移一个字符	Ctrl—K	删除至行尾
Ctrl—←	光标左移一个词	PageUp	向前翻页
Ctrl—Home	把光标移到命令窗口首	Home,Ctrl—A	光标移到行首

使用 clear 命令清除工作空间内所有变量,释放系统内存,使用 clc 命令清除命令窗口的显示内容,但不清除工作空间,用 ↑ 键仍可调回上次输入的命令.

MATLAB 提供了功能强大的在线帮助系统,用户可以随时通过在线帮助系统获得帮助信息.

MathWorks 公司于 1993 年购入了著名的符号数学软件 Maple 的使用权后,利用 Maple 的函数库,开发了符号数学工具箱. MATLAB 的符号数学工具箱的主要功能包括符号表达式的创建、符号矩阵的创建、符号表达式的化简和替换、符号微积分、符号代数方程、符号微分方程、符号函数绘图等.

二、应用 MATLAB 进行函数运算

1. 实验目的:能用 MATLAB 熟练地创建符号变量及表达式,进行函数的运算.

2. 主要命令:

(1)x=sym('x'):创建一个符号变量 x,它可以是字符、字符串、表达式或字符表达式.

(2)syms *abc*... :一次创建多个符号变量.

(3)常用的函数及运算命令(实训表 1-2)。

实训表 1-2　常见的函数及运算命令

sin	正弦	cos	余弦
asin	反正弦	acos	反余弦
tan	正切	cot	余切
atan	反正切	acot	反余切
sec	正割	csc	余割
exp	指数	log	自然对数
log10	常用对数	sqrt	平方根
abs	绝对值	conj	复共轭
image	复数虚步	real	复数实部
expand	符号表达式的展开	factor	符号表达式因式分解
simple	寻找符号表达式的最简型	simplify	符号表达式化简
radsimp	化简含根式的符号表达式	numden	符号表达式通分
+	加	-	减
*	乘	/	除
^	乘方	pi	π
inf	∞	i,j	虚数单位
nan	非数值		

3. 实验举例：

实验一：使用 sym 函数创建符号变量 a，字符串 hello，表达式 x^3+5x.

[Matlab 操作命令]：

```
>>a=sym('a')
```

[Matlab 输出结果]：

```
a=
    a
```

[Matlab 操作命令]：

```
>>b=sym ('hello')
```

[Matlab 输出结果]：

```
b=
    hello
```

[Matlab 操作命令]：

```
>>y=sym('x^3+5*x')
```

[Matlab 输出结果]：

```
y=
   x^3+5*x
```

实验二：创建符号变量 a,b,n,x 和 t，建立函数 $f=ax^n+bt$.

[Matlab 操作命令]：

```
>>syms  a  b  n  x  t
>>f=a*x^n+b*t
```

[Matlab 输出结果]：

```
f=
    a*x^n+b*t
```

由于 syms 函数书写简洁，意义清楚，符合 MATLAB 的习惯和特点，一般提倡使用 syms 函数创建符号变量.

实验三：计算表达式 x^2+2x+1 与表达式 $x+1$ 的和、差、积、商和乘方，并对积进行因式分解、展开，对商进行化简.

[Matlab 操作命令]：

```
>>syms x
>>s1=x^2+ 2*x+1;s2=x+1;
>>s1+s2
```

[Matlab 输出结果]：

```
Ans=
    x^2+3*x+2
```

[Matlab 操作命令]：

```
>>s1-s2
```

[Matlab 输出结果]：

```
Ans=
    (x^2+2*x+1)-(x+1)
```

[Matlab 操作命令]：

```
>>s1*s2
```

[Matlab 输出结果]：

```
Ans=
    (x^2+2*x+1)*(x+1)
```

[Matlab 操作命令]：

```
>>s1/s2
```

[Matlab 输出结果]：

```
Ans=
    (x^2+2*x+1)/(x+1)
```

[Matlab 操作命令]：

```
>>s1^s2
```

[Matlab 输出结果]：

```
Ans=
    (x^2+2*x+1)^(x+1)
```

[Matlab 操作命令]：

```
>>f=factor(x^2+2*x+1)*(x+1)
```

[Matlab 输出结果]：

```
Ans=
    (x+1)^3
```

[Matlab 操作命令]：

```
>>expand((x^2+2*x+1)*(x+1))
```

[Matlab 输出结果]：

```
Ans=
    x^3+3*x^2+3*x+1
```

[Matlab 操作命令]：

```
>>simplify((x^2+2*x+1)/(x+1))
```

[Matlab 输出结果]：

```
Ans=
    x+1
```

实验四：计算$\frac{\sin(|x|+|y|)}{\sqrt{\cos(|x+y|)}}$的值，其中 $x=-1.42$，$y=0.52$.

[Matlab 操作命令]：

```
>>clear
>>clc
>>x=-1.42;y=0.52;
>>sin(abs(x)+abs(y))/sqrt(cos(abs(x+y)))
```

[Matlab 输出结果]：

```
Ans=
    1.1829
```

三、应用 MATLAB 进行函数作图

1. 实验目的：能用 MATLAB 熟练地进行函数作图.

2. 主要命令：

(1)plot(x,y)：表示作函数 $y=f(x)$的图形.

(2)plot(x,y,'参数')：表示给图形添加颜色、确定线型及数据点的图标等.

下面列出了常见参数控制符(实训表 1－3)。

实训表 1－3　常见参数控制符

b	蓝色	m	紫红色
c	青色	r	红色
g	绿色	w	白色
k	黑色	y	黄色
—	实线(默认)	:	点连线
—.	点画线	--	虚线
.	点	s	正方形
+	十字号	d	菱形
O(字母)	圆圈	h	六角形
*	星号	p	五角形
x(字母)	叉号	>	右三角

(3)plot($x1$,$y1$,'参数 1',$x2$,$y2$,'参数 2'…):表示用同一函数在同一坐标系中画多幅图形,其中 $x1$,$y1$ 确定第一条曲线的坐标值,参数 1 为第一条曲线的选项参数;$x2$,$y2$ 为第二条曲线的坐标值,参数 2 为第二条曲线的选项参数……

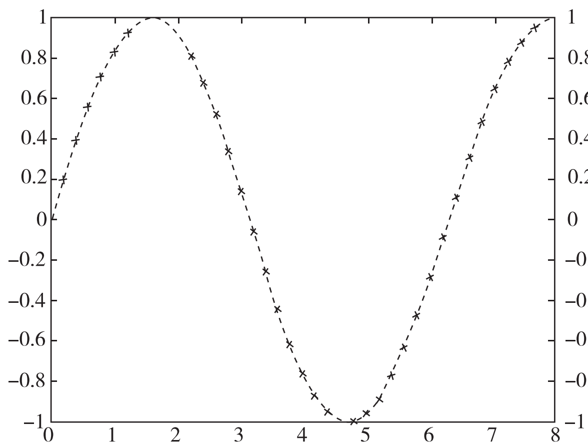
3. 实验举例:

实验五:用红色、点连线、叉号画出正弦曲线 $y=\sin x$.

[Matlab 操作命令]:

```
>>x=0:0.2:8;        (给出 x 向量,步长 0.2)
>>y=sin(x);
>>plot(x,y,'r:x')
```

[Matlab 输出结果]:



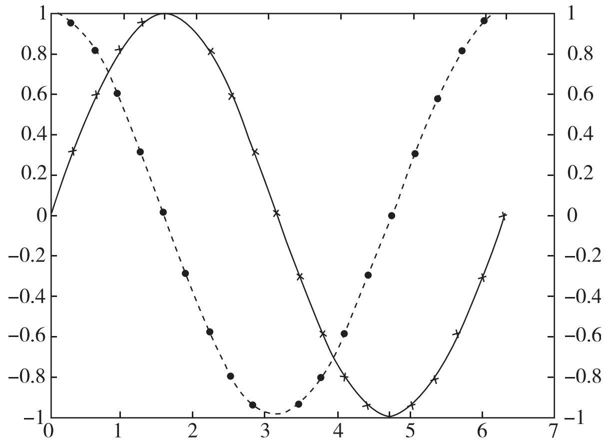
实训图 1-2

实验六:在同一坐标内,画出一条正弦曲线和一条余弦曲线,要求正弦曲线用红色实线、数据点用"+"号显示;余弦曲线用黑色点线、数据点用"+"号显示.

[Matlab 操作命令]:

```
>>clear
>>clc
>>x=0:pi/10:2*pi;
>>y1=sin(x)
>>y2=cos(x);
>>plot(x,y1,'r+-',x,y2,'k+:')
```

[Matlab 输出结果]:



实训图 1 - 3

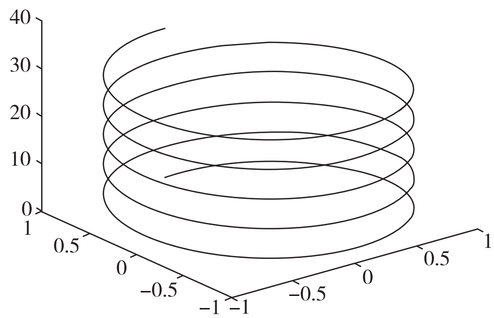
MATLAB 提供了 plot3 函数绘制三维曲线图形. 其功能和使用方法类似于绘制二维图形的函数.

实验七：建立并绘制一条三维曲线.

[Matlab 操作命令]：

```
>>clear
>>clc
>>z=0:pi/50:10 * pi;
>>x=sin(z);
>>y=cos(z);
>>plot3(x,y,z)
```

[Matlab 输出结果]：



实训图 1 - 4

实训题一

训练一：已知 $a=4.96$，$b=8.11$，计算$\dfrac{e^{a+b}}{\lg(a+b)}$的值.

训练二：计算表达式 $x+1$ 与表达式 x^2-3x+1 的和、差、积、商和乘方，并对所得结果进行展开、化简.

训练三：将式子 $m^3-6m^2+12m-8$ 因式分解.

训练四：用不同的线型和颜色在同一坐标内绘制曲线 $y=2e^{-0.5x}\sin(2\pi x)$图形.

第二章

极限

高等数学研究问题所采用的基本方法是极限法。高等数学的一些基本概念是通过极限概念来确定的，一些基本性质和法则也是通过极限推导出来的.

§ 2.1 数列极限

一、数列极限的概念

按一定次序排列的无穷多个数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

称为无穷数列，简称数列，可简记为$\{x_n\}$. 其中每一项称为数列的项，x_n 称为通项(一般项).

定义 设有数列$\{x_n\}$与常数 a，如果当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 a，则称常数 a 为数列$\{x_n\}$的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a，或\ x_n \to a\ (n\to\infty).$$

如果一个数列没有极限，就称该数列是发散的.

注：记号 $x_n \to a\ (n\to\infty)$常读作：当 n 趋于无穷大时，x_n 趋于 a.

例 下列各数列是否收敛，若收敛，请指出其收敛于何值.

(1)$\{3^n\}$； (2)$\{\frac{1}{n}\}$；

(3)$\{(-1)^{n+1}\}$； (4)$\{\frac{n-1}{n}\}$.

解 (1)数列$\{3^n\}$即为

$$3, 9, 27, \cdots, 3^n, \cdots.$$

易见，当 n 无限增大时，3^n 也无限增大，故该数列是发散的.

(2)数列$\{\frac{1}{n}\}$即为

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

易见，当 n 无限增大时，$\frac{1}{n}$也无限接近于 0，故该数列收敛于 0.

(3)数列$\{(-1)^{n+1}\}$即为

$$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$$

易见，当 n 无限增大时，$(-1)^{n+1}$无休止地反复取 1，-1 两个数，而不会无限接近于

任何一个确定的常数,故该数列是发散的.

(4)数列$\{\frac{n-1}{n}\}$即为

$$0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$$

易见,当 n 无限增大时,$\frac{n-1}{n}$无限接近于 1,故该数列收敛于 1.

二、数列收敛的条件

定理 1　(必要条件)　若数列$\{x_n\}$收敛,则数列$\{x_n\}$一定有界.

需要注意的是,有界数列不一定收敛,但无界数列必然发散.

定理 2　(充要条件)　数列$\{x_n\}$收敛于 a 的充要条件是其任一子数列都收敛于 a.

定理 3　(充要条件)　数列$\{x_n\}$收敛于 a 的充要条件是其子数列$\{x_{2m-1}\}$与$\{x_{2m}\}$都收敛于 a.

三、建立函数模型

在当前市场经济条件下,在商店,尤其是私营个体商店中的商品,所标价格 a 与其实际价值 b 之间,存在着相当大的差距.对购物的消费者来说,总希望这个差距越小越好,即希望比值$\frac{a}{b}=\lambda=1$;而商家则希望 $\lambda>1$.这样,就存在两个问题:第一,商家应如何根据商品的实际价值(或保本价)b 来确定其价格 a 才较为合理?第二,购物者根据商品定价,应如何与商家"讨价还价"?

个体商家在实际定价中,常用"黄金数"方法,即按实际价值 b 定出的价格 a,使$\frac{b}{a}=0.618$.

对消费者来说,如何"讨价还价"才算合理?一种常见的方法是"对半还价法":消费者第一次减去定价的一半,商家第一次讨价则加上二者差价的一半;消费者第二次还价再减去二者差价的一半……直至达到双方都能接受的价格为止.

有人认为,这样讨价还价的结果,其理想的最终价格,将是原定价的黄金分割点.其实不然,我们可建立数学模型定量分析一下上述"讨价还价"的过程和结果.

设原定价格为 a,各次讨价还价如表 2-1 所示。

表 2-1

	消费者还价	商家讨价
第一次	$b_1=\frac{a}{2}$	$c_1=b_1+\frac{a-b_1}{2}=\frac{a}{2}+\frac{a}{4}$
第二次	$b_2=c_1-\frac{1}{2}(c_1-b_1)=\frac{a}{2}+\frac{a}{4}-\frac{a}{8}$	$c_2=b_2+\frac{1}{2}(c_1-b_2)=\frac{a}{2}+\frac{a}{4}-\frac{a}{8}+\frac{a}{16}$
⋮	⋮	⋮

由此可见，b_k 和 c_k 是摆动数列$\{a_n\}$的交错项：

$n=1$ 时，$a_1=\frac{a}{2}$；

$n\geqslant 2$ 时，$a_n=\frac{a}{2}+\left[\frac{a}{4}-\frac{a}{8}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2^n}a\right]$. a_n 是由$\frac{a}{2}$和以$-\frac{1}{2}$为公比，以$\frac{a}{4}$为首项的等比数列两部分组成，从而有

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{a}{2}+\frac{a}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{a}{2}+\frac{a}{6}=\frac{2}{3}a.$$

这就是$\{b_n\}$和$\{c_n\}$共同的极限值. 也就是说，对半讨价还价的最终结果，是原价的三分之二.

又因$\frac{2}{3}-0.618\approx 0.049$，所以，如果商家按“黄金数”定价，如上讨价还价后，对双方来说，都是可以接受的.

练习题 2.1

1. 用观察的方法判断下列数列极限是否存在（或数列是否收敛）.

(1) $10,10,10,10,\cdots$；

(2) $\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\cdots$；

(3) $0.9,0.99,0.999,0.999\,9,\cdots$；

(4) $1,\frac{3}{2},\frac{1}{3},\frac{5}{4},\frac{1}{5},\frac{7}{6},\cdots$；

(5) $0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{6},0,\frac{1}{8},\cdots$.

2. 观察下列数列当 $n\to\infty$时的变化趋势，指出哪些有极限，极限是什么，哪些没有极限，为什么？

(1) $x_n=\frac{1\,000}{n}$；　(2) $x_n=(-1)^n\frac{1}{2^n}$；　(3) $x_n=\frac{n}{n+1}$；　(4) $x_n=1-\frac{1}{3^n}$；

(5) $x_n=1+(-1)^n$；　(6) $x_n=(-1)^n n$；　(7) $x_n=2+\frac{1}{n}$.

3. 求证下列数列的极限不存在：

$$1,\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},3,\cdots,n,\frac{1}{n+1},\cdots$$

§2.2 函数极限

一、$x\to\infty$的情形

定义 1 如果当 x 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$无限接近于常数 A,则称常数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A, \text{或 } f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

如果在上述定义中,限制 x 只取正值或者只取负值,即有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty} f(x)=A,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to+\infty$或 $x\to-\infty$时的极限.

注意到 $x\to\infty$意味着同时考虑 $x\to+\infty$与 $x\to-\infty$,可以得到下面的定理:

> **极限思想**
>
> 极限思想,是指用极限概念分析问题和解决问题的一种数学思想.用极限思想解决问题的一般步骤可概括为:对于被考察的未知量,先设法构思一个与它有关的变量,确认这个变量通过无限过程的结果就是所求的未知量;最后用极限计算得到结果.

定理 1 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

例 1 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

解 因为当 x 的绝对值无限增大时,$\dfrac{1}{x}$无限接近于 0,即函数 $1+\dfrac{1}{x}$无限接近于常数 1,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$.

例 2 讨论$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$.

解 观察函数 $y=\sin x$ 的图形(图 2-1)易知:当自变量 x 的绝对值$|x|$无限增大时,对应的函数值 y 在区间$[-1,1]$上振荡,不能无限接近于任何常数,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

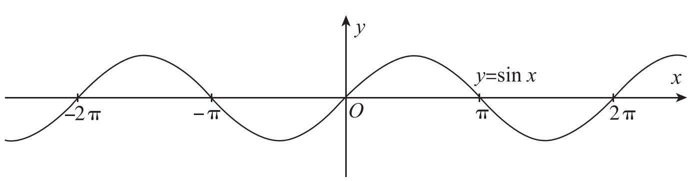


图 2-1

例 3 讨论$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$ 及 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$.

解　观察函数 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 的图像(图 2－2)易知：当 $x\to-\infty$ 时，曲线 $y=\arctan x$ 无限接近于直线 $y=-\dfrac{\pi}{2}$，即对应的函数值无限接近于常数 $-\dfrac{\pi}{2}$；当 $x\to+\infty$ 时，曲线 $y=\arctan x$ 无限接近于直线 $y=\dfrac{\pi}{2}$，即对应的函数值无限接近于常数 $\dfrac{\pi}{2}$. 所以极限

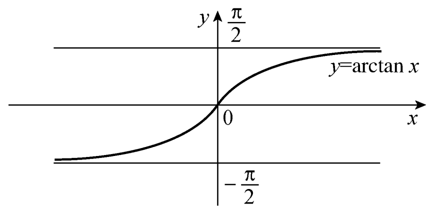


图 2－2

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$，所以极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

二、$x\to x_0$ 的情形

定义 2　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果当 $x\to x_0(x\neq x_0)$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限. 记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\text{或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

例 4　试根据定义说明下列结论：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$.

解　(1) 当自变量 x 趋于 x_0 时，函数 $y=x$ 也趋于 x_0，故 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$；

(2) 当自变量 x 趋于 x_0 时，函数 $y=C$ 始终取相同的值 C，故 $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$.

当自变量 x 从 x_0 左侧(或右侧)趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋于常数 A，则称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限(或右极限)，记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\left(\text{或}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\right).$$

图 2－3、图 2－4 分别为左极限和右极限的示意图.

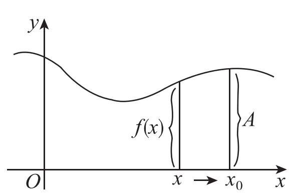


图 2－3

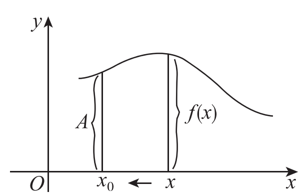


图 2－4

注意到 $x\to x_0$ 意味着同时考虑 $x\to x_0^-$ 与 $x\to x_0^+$，可以得到下面的定理：

定理 2　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

例 5　已知 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解　$\because\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 0}f(x)=0.$

例 6　设 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x+1, & x<0, \end{cases}$ 求$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解　因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

即有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在(图 2 - 5).

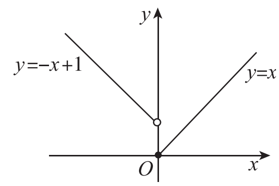


图 2 - 5

练习题 2.2

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$,$\varphi(x)=\dfrac{x}{x}$当 $x\to 0$ 时的左右极限,并说明它们在 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

2. 判断$\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}$是否存在,若将极限过程改为 $x\to 0$ 呢?

3. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0, \end{cases}$ 讨论 $x\to 0$ 时 $f(x)$的极限.

5. 讨论$\lim\limits_{x\to 5}(2x+1)$.

6. 讨论$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

7. 讨论$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$.

8. 设 $f(x)=\begin{cases} 3x+3, & x<2, \\ 2x, & x\geqslant 2, \end{cases}$ 观察 $f(x)$的图像并求$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

§ 2.3　无穷小量与无穷大量

一、无穷小量

定义 1　如果函数 $f(x)$当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的极限为零,则称函数 $f(x)$为 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$,所以函数 e^{-x}为当 $x\to+\infty$时的无穷小量.

定理 1　$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$ 的充分必要条件为存在 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量 $a(x)$使得

$$f(x)=A+a(x)$$

这一定理的证明可由极限和无穷小量的定义得到，这里从略.

二、无穷小量的运算法则

定理 2 两个无穷小量的和仍为无穷小量.

推论 1 有限个无穷小量的和仍为无穷小量.

定理 3 有界函数与无穷小量的乘积为无穷小量.

推论 2 常数与无穷小量的乘积是无穷小量.

推论 3 有限个无穷小量的乘积也是无穷小量.

三、无穷大量

定义 2 如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，对应的函数值 $|f(x)|$ 无限增大，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷大量. 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty\text{（或}\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty\text{）}.$$

当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷大量的 $f(x)$，按函数极限的定义来说，极限是不存在的. 但为了便于叙述函数的这一性态，我们也说“函数的极限是无穷大量”.

如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，对应的函数值 $f(x)$ 无限增大，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为正无穷大量. 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty\text{（或}\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty\text{）}.$$

若对应的函数值 $f(x)<0$，且 $|f(x)|$ 无限增大，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为负无穷大量. 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty\text{（或}\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty\text{）}.$$

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

定理 4 在自变量同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

例 2 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$.

解 当 $x\to+\infty$ 时，e^{-x} 是无穷小量，由定理 4 知，$x\to+\infty$ 时 $e^x=\dfrac{1}{e^{-x}}$ 就是无穷大量，因为 $e^x>0$，所以 $x\to+\infty$ 时，e^x 是正无穷大量，即

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty.$$

四、无穷小量的比较

两个无穷小量的和、差及乘积仍然是无穷小量，但两个无穷小量之比，却会出现不同的情况. 例如，当 $x\to 0$ 时，$3x$、x^2 都是无穷小

无穷小量的比较

量，但是$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x^2}=\infty$，比的极限不同，反映了不同的无穷小量趋于零的速度的差异. 为了比较无穷小量趋于零的速度的快慢，我们给出下面的定义.

定义 3　设在自变量的同一变化过程中，α 和 β 都是无穷小量.

(1)若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小量，记作 $\beta=o(\alpha)$；

(2)若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小量；

(3)若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C(C\neq 0)$，则称 β 与 α 是同阶的无穷小量.

特别地，若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小量，记作 $\alpha\sim\beta$.

等价无穷小量在求两个无穷小量之比的极限时，有重要作用，对此有如下定理.

定理 5　设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

证明　$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\left(\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)=\lim\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\dfrac{\alpha'}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

下面是常用的几个等价无穷小量代换，当 $x\to 0$ 时有

$$\sin x\sim x,\ \tan x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \arctan x\sim x,\ 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},$$

$$\ln(1+x)\sim x,\ e^x-1\sim x,\ \sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}.$$

例 3　求下列极限：

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$；　　(2)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}$.

解　(1)当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$，$\sin 5x\sim 5x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

(2)当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$x^3+3x\sim x^3+3x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+3}=\frac{1}{3}.$$

练习题 2.3

1. 判断题

(1)非常小的数是无穷小量.　　(　　)

(2)零是无穷小量.　　(　　)

(3)两个无穷小量的商是无穷小量.　　(　　)

(4)两个无穷大量的和一定是无穷大量.　　(　　)

2. 下列变量在给定的变化过程中哪些是无穷小量？哪些是无穷大量？

(1)$2^{-x}-1(x\to 0)$；　　(2)$\dfrac{1}{x+1}(x\to -1)$；　　(3)$\ln x(x\to 1)$；

(4) $\frac{x}{0.01}(x\to 0)$;　　(5) $\frac{2}{x}(x\to 0)$;　　(6) $\frac{x^2}{x}(x\to 0)$.

3. 下列函数在什么情况下是无穷小量？什么情况下是无穷大量？

(1) $y=\frac{2}{x+8}$;　　(2) $y=\frac{2}{x^2}$.

4. 利用等价无穷小量代换定理求极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

5. 当 $x\to 0$ 时，x^2-2x 与 x^3-x^2 相比较哪个是高阶无穷小量？

§2.4 极限运算法则与两个重要极限

一、极限四则运算法则

定理 设当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限均存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{A}{B}$，$(B\neq 0)$.

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)=\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}5=(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-3\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}5=2^2-3\cdot 2+5=3$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-9}{5x^2-7x-2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-9}{5x^2-7x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-9)}{\lim\limits_{x\to 3}(5x^2-7x-2)}=\frac{2\cdot 3^2-9}{5\cdot 3^2-7\cdot 3-2}=\frac{9}{22}$.

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}$.

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$.

解 当 $x\to 4$ 时，

$$\sqrt{x+5}-3\to 0$$

不能直接使用商的极限运算法则，但可采用分母有理化消去分母中趋向于零的因子.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to4}(\sqrt{x+5}+3)=6.$$

例 5　求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-1}{x^2+3}$.

解　$x\to\infty$时，分子和分母都趋向于无穷大，分子分母同除以 x^3，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-1}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}=\infty.$$

例 6　求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+9}{5x^2+2x-1}$.

解　$x\to\infty$时，分子和分母都趋向于无穷大，分子分母同除以 x^2，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+9}{5x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}}{5+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{4}{5}.$$

例 7　求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+5}{x^2-9}$.

解　$x\to\infty$时，分子和分母都趋向于无穷大，分子分母同除以 x^2，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{x^2-9}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}}=0.$$

一般地，当 $a_0\neq0$，$b_0\neq0$，m 和 n 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\infty, & m>n,\\ \frac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m<n.\end{cases}$$

二、两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

例 8　求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1.$

例 9　求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\right)$，令 $3x=t$，$3\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=3$.

例 10　求$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

> **化归思想**
>
> 化归思想就是将待解决的或者难以解决的问题 A 经过某种转化手段，转化为有固定解决模式的或者容易解决的问题 B，通过解决问题 B 达到解决问题 A 的方法. 化归的原则有化未知为已知、化繁为简、化难为易、降维降次、标准化等.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\right)$

例 11 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+3}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$.

例 12 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

例 13 求$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\right]^{-2}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\right]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$.

例 14 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{2+x}\right)^{2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{2+x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2+x}\right)^x\right]^2=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\dfrac{1}{2+x}\right)^{2+x}\right]^2\cdot\left(1+\dfrac{1}{2+x}\right)^{-4}\right\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2+x}\right)^{2+x}\right]^2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2+x}\right)^{-4}=\mathrm{e}^2.$$

练习题 2.4

求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$;

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$;

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$;

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{5x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{3}{x}}$;

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2\dfrac{x}{3}}$;

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x-1}{3x^2+x+2}$;

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+3x+7}{7x^2+x-2}$;

(15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-x^2+3}$.

基础训练

一、选择题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 不存在　　D. ∞

2. 下列各式不正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$　　B. $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$　　C. $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$

3. 下列各式正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$　　B. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{x}=e$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e$

4. 当 $x\to0^+$ 时，下列函数中(　　)为无穷小量.

A. $x\sin\dfrac{1}{x}$　　B. $e^{\frac{1}{x}}$　　C. $\ln x$　　D. $\dfrac{1}{x}\sin x$

二、求极限

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$；　　2. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+5}{\sqrt{x^2+7}}$；　　3. $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}$；

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5}{2x^2-x-1}$；　　5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+n}{n^4-3n^2+1}$；　　6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x-2}$；

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$；　　8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$；　　9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 6x}{x}$；

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$；　　11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$；　　12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

三、解答题

1. 下列说法正确吗？为什么？

(1)无穷小量是很小很小的数；

(2)无穷大量是很大很大的数；

(3)无穷小量的倒数是无穷大量；

(4)无穷大量的倒数是无穷小量.

2. 设 $f(x)=\dfrac{|x|-x}{x}$，求 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，并判断 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是否存在.

3. 作出 $f(x)$ 的图像，并讨论在点 $x=1$ 处的左右极限，其中

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<1,\\ 1, & x=1,\\ -1, & x>1.\end{cases}$$

数学史话

本章内容精要

风骨超常伦——伽利略

伽利略(Galileo Galilei,1564—1642)生于意大利的比萨,1581 年进入比萨大学攻读医学.他是世界著名的数学家、天文学家、物理学家,对现代科学思想的发展做出了重大贡献.他是最早用望远镜观察天体的天文学家,曾用大量的事实证明地球环绕太阳旋转,否定了地心说.由于他最先将科学实验和数学分析方法相结合,并用来研究惯性运动和落体运动规律,被认为是现代力学和实验物理的创始人.

1583 年,他发现教堂吊灯摆动的周期性,后来经过证实,并提出摆动原理.1585 年,他到佛罗伦萨学院任教.1586 年他发明了比重计,因此而闻名于意大利.1587 年他写出关于固体重心的论文,因此而出任比萨大学的数学讲师.从此他开始研究运动理论,首先推翻了亚里士多德关于不同重量的物体以不同速度下落的论点.1592 年他到帕多瓦任数学讲师,在那里工作了 18 年,完成了大量杰出的工作.他试图从理论上证明等加速度运动定律,并提出抛物体沿抛物线运动的定律.他利用自制的望远镜观察天体.1609—1610 年间,他宣布了一系列的发现:月球表面不规则;银河系由大量恒星组成;木星的卫星;土星光环和太阳黑子等.

1632 年,伽利略发表了《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》,大力支持和阐释了哥白尼的地动说,因此而受到教会的痛恨.1633 年罗马教廷宗教裁判所对他进行了审判,并处以八年软禁.他虽被监禁却仍继续从事研究,次年完成《关于两门新科学的谈话和数学证明》一书,扼要地讲述了他的早期实验成果和对力学原理的思考.他坚持"自然科学书籍要用数学来写"的观点.他的著作当时在欧洲被认为是文学和哲学的杰作.

伽利略在科学史上处于极高的地位,他的贡献是划时代的,具有永久的意义.首先,他认识到数学的核心意义,用数学公式去表达物理定律,把天上和地上的现象统一到一个理论之下.其次,他是近代力学的创始者.再者,他用望远镜观察天体,这是人类走向宇宙的第一步.

数学实训(二)

应用 MATLAB 求极限

1. 实验目的:能用 MATLAB 熟练地求数列与函数的极限.

2. 主要命令:

(1)Limit(s):求表达式 s 默认当自变量趋向于 0 时的极限.

(2)Limit(s,a):求表达式 s 默认当自变量趋向于 a(a 可以为∞)时的极限.

(3)Limit(s,x,a):求表达式 s 在 x 趋向于 a(a 可以为∞)条件下的极限.

(4)Limit(s,x,a,'right'):求表达式 s 在 x 趋向于 a 条件下的右极限.

(5)Limit(s,x,a,'left'):求表达式 s 在 x 趋向于 a 条件下的左极限.

3. 实验举例:

实验:分别计算表达式 $\lim\limits_{x\to0^+} 2^{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to0^-} 2^{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}$, $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}$, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}$, $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+1}$.

[Matlab 操作命令]:

```
>>clear
>>clc
>>syms x a;
>>limit(2^(1/x),x,0,'right')
```

[Matlab 输出结果]:

```
Ans=
      inf
```

[Matlab 操作命令]:

```
>>limit(2^(1/x),x,0,'left')
```

[Matlab 输出结果]:

```
Ans=
      0
```

[Matlab 操作命令]:

```
>>limit(sin(a*x)/sqrt(1-cos(x)),0,'right')
```

[Matlab 输出结果]:

```
Ans=
      a*2^(1/2)
```

[Matlab 操作命令]:

```
>>limit(sin(a*x)/sqrt(1-cos(x)),x,0,'left')
```

[Matlab 输出结果]:

```
Ans=
      -a*2^(1/2)
```

[MatLab 操作命令]:

```
>>limit(sin(a*x)/sqrt(1-cos(x)))
```

[Matlab 输出结果]:

```
Ans=
      nan
```

[Matlab 操作命令]:

```
>>limit((x^2-3*x+2)/(x^2-4*x+3),1)
```

[Matlab 输出结果]:

Ans=

    1/2

[Matlab 操作命令]:

```
>>limit((1+2/x)^(x+2),x,+inf)
```

[Matlab 输出结果]:

Ans=

    exp(2)

[Matlab 操作命令]:

```
>>limit(((2*x—1)/(2*x+1))^(x+1),inf)
```

[Matlab 输出结果]:

Ans=

    exp(-1)

实训题二

训练一:计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{2x}$.

训练二:计算 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$.

训练三:计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$.

训练四:计算 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

训练五:计算 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$.

训练六:计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

训练七:计算 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

训练八:计算 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$.