前言

教材简介

本书第一版为“十二五”职业教育国家规划教材，第二版为“十三五”职业教育国家规划教材，编者为适应实际用书需要进行了修订再版。此次编者根据教育部制定的《高职高专教育高等数学教学基本要求》，充分吸取高等职业教育、高等专科教育在探索培养技术应用型专门人才方面取得的经验，遵循技术技能人才成长，知识传授与技术技能培养并重，强化学生职业素养养成和专业技术积累，突出以社会主义核心价值观为引领，把理想信念、职业道德、工匠精神、奉献社会等思想政治教育核心元素融入教材内容。再版时注意修改不足之处，并删去了相对难度较大的内容、例题与习题，使之更适合教学实际。我们力求体现下述几点：

1. 按照教学基本要求，充分考虑高职高专教育的基本特点和当前各院校的教学实际情况，坚持“以应用为目的，理论知识以必须、够用为度”.

2. 教材内容的安排，应符合学生的认知规律，要体现出由具体到抽象、由特殊到一般的认知原则，对基本概念、基本理论、基本方法做深入浅出、通俗易懂的介绍.

3. 重点突出，分散难点，注重几何直观与物理解释，重视培养学生的几何想象能力、抽象概括能力、逻辑推理能力和应用数学知识于实际的能力.

4. 教材的每一章的知识扩展中，注意数学文化在高等数学课堂教学中的渗透，开拓知识视野，提高学习兴趣.

5. 教材中注意信息技术的应用，实现信息技术与数学课程内容的有机整合。淡化手工计算，特别强调计算技巧的积分训练，推广数学建模活动，调动学生学习数学的积极性，提高学生解决简单实际问题的能力.

本书由北京劳动保障职业学院、北京财贸职业学院、北京东城区职工大学、北京市西城经济科学大学等四所院校的四位数学教师合作编写。全书由金桂堂任主编，陈皞任副主编，其中第 1、第 2 章由曹林纳编写，第 3、第 4 章由陈皞编写，第 5、第 6 章由杨桂芹编写，第 7 章及附录由金桂堂编写，最后由主编修改、统稿、定稿.

由于编者水平有限，书中不足之处在所难免，恳请各位同人与读者批评指正.

编者

目　录

数学是打开科学大门的钥匙，忽视数学必将伤害所有的知识，因为忽视数学的人是无法了解任何其他科学乃至世界上任何其他事物的. 更为严重的是，忽视数学的人不能理解他自己这一疏忽，最终将导致无法寻求任何补救的措施.

——弗朗西斯·培根(Francis Bacon，英，1561—1626)

勤能补拙是良训，一分辛苦一分才.

——华罗庚(Hua Luogeng，中，1910—1985)

第 1 章 函数

函数是微积分学的研究对象，初等微积分主要研究初等函数. 本章主要复习函数概念，归纳总结函数的基本性质，引出初等函数概念，并介绍经济管理应用中的一些实用函数，为下一章极限与连续打下基础.

1.1 函数及其性质

学习目标

1. 理解函数的概念，掌握求函数的定义域的方法.
2. 了解函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性.

基本内容

1.1.1 函数的概念

定义 1.1.1 设 D 为一个非空实数集. 若对于 D 中的任意一个实数 x，按照某一确定的对应法则 f，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称对应法则 f 为定义在集合 D 上的函数，记为 $y=f(x)$. 称 x 为自变量，x 的取值范围 D 为函数的定义域，称 y 为因变量，y 的取值范围为函数的值域.

通常我们也说因变量 y 是自变量 x 的函数. 当自变量 x 在其定义域内取定某个确定的实数值 x_0 时，相应的函数值记作 $y_0=f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$. 对于不同的函数，应该使用不同的记号来表示，例如 $f(x)$，$g(x)$，$F(x)$，$G(x)$等.

由函数的定义可知，定义域和对应法则是函数的两个要素，而函数的值域是依赖于这两个要素的. 如果两个函数具有相同的定义域和对应法则，那么它们就是相同的函数. 函数的表示方法主要有公式法、图像法、表格法等.

例 1　求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{x+4}{x^2-3x+2}$　　(2) $y=\log_3(4x-3)$　　(3) $y=\sqrt{x^2-1}-\lg(6-5x)$

解　(1) 因为分式的分母不能为零，所以 $x^2-3x+2\neq0$，解得 $x\neq1$ 且 $x\neq2$，即函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 因为零与负数没有对数，即真数必须大于零，所以 $4x-3>0$，解得 $x>\dfrac{3}{4}$，即函数的定义域为 $\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

(3) 因为负数没有平方根，真数必须大于零，所以 $\begin{cases}x^2-1\geqslant0,\\6-5x>0.\end{cases}$ 这是一个不等式组. 解 $x^2-1\geqslant0$，得 $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant1$；解 $6-5x>0$，得 $x<\dfrac{6}{5}$. 将其在数轴上表示出来，如图 1-1-1所示.

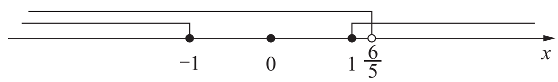

图 1-1-1

因此，公共解为 $x\leqslant-1$ 或 $1\leqslant x<\dfrac{6}{5}$，即函数的定义域为 $(-\infty,-1]\cup\left[1,\dfrac{6}{5}\right)$.

除了用不等式、区间来表示变量的取值范围，我们还经常使用另外一个术语：邻域.

如图 1-1-2 所示，设 x_0 是任意一个实数，δ 是一个小的正数，则开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为以 x_0 为中心、以 δ 为半径的邻域，简称为 x_0 的 δ 邻域，并记为 $N(x_0,\delta)$，即

$$x\in N(x_0,\delta)\Leftrightarrow x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

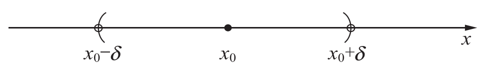

图 1-1-2

为了便于理解，我们经常把 x_0 的 δ 邻域直观地说成 x_0 的附近，比如说函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域内有定义，可以直观地理解为 $f(x)$ 在 x_0 的附近有定义.

1.1.2　函数的性质

1. 单调性

定义 1.1.2　设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义. 若对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1，x_2 且 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加；若对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1，x_2 且 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调减少.

单调增加函数或单调减少函数，统称为单调函数. 相应的区间称为函数的单调区间.

例 2　证明：函数 $y=x^3$ 在实数域 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增.

证明　在 $(-\infty,+\infty)$ 内任取两点 x_1，x_2 且 $x_1<x_2$，

则有　$y_1-y_2=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$.

由　$x_1<x_2$ 得 $x_1-x_2<0$，

而　$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1^2+x_1x_2+\frac{1}{4}x_2^2\right)+\frac{3}{4}x_2^2=\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$，

故　$y_1-y_2=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<0$，

即　$y_1<y_2$，所以，$y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内为单调递增函数.

2. 奇偶性

定义 1.1.3　设函数 $f(x)$的定义域是关于原点对称的区间 I. 若对区间 I 内的任意一点 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数；若对区间 I 内的任意一点 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数.

奇函数的图像关于坐标原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如，函数 $y=\sin x$ 在实数域$(-\infty,+\infty)$内为奇函数，函数 $y=\cos x$ 在实数域$(-\infty,+\infty)$内为偶函数.

例 3　证明：函数 $y=x^3\sin x+\cos x$ 在实数域$(-\infty,+\infty)$内为偶函数.

证明　在实数域$(-\infty,+\infty)$内任取一点 x，则有$-x\in(-\infty,+\infty)$.

因为　$f(-x)=(-x)^3\sin(-x)+\cos(-x)=x^3\sin x+\cos x=f(x)$，

所以　$y=x^3\sin x+\cos x$ 在实数域$(-\infty,+\infty)$内为偶函数.

3. 周期性

定义 1.1.4　设函数 $f(x)$的定义域为 D. 若存在正的常数 T，使得对于任意的 $x\in D$，总有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$为周期函数，称 T 为 $f(x)$的周期. 若存在最小的正数 T 使得上式成立，则称 T 为最小正周期，简称为周期.

我们通常所说的周期函数的周期实际上指的是它的最小正周期. 例如，正弦函数 $y=\sin x$与余弦函数 $y=\cos x$ 都是周期函数，它们的最小正周期均为 2π，通常我们就说它们的周期为 2π. 本书所介绍的周期函数主要指三角函数.

4. 有界性

定义 1.1.5　设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义. 若存在正数 M，使得对于区间 I 上的任意一个 x，总有$|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$在区间 I 上是有界函数. 否则称 $f(x)$在区间 I 内是无界函数.

如图 1-1-3 所示，有界函数的图像能够夹在直线 $y=M$ 和直线 $y=-M$ 之间. 而无界函数的图像不能永远被夹在两条水平直线之间.

例 4　证明：函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内为有界函数.

证明　由于在$(-\infty,+\infty)$内$|\sin x|\leqslant 1$，所以，取正数 $M\geqslant 1$ 时，有$|\sin x|\leqslant M$ 成立，即$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内为有界函数.

同理可证，余弦函数 $y=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界函数.

例 5　根据图形说明函数 $y=\ln x$ 在定义域内为无界函数.

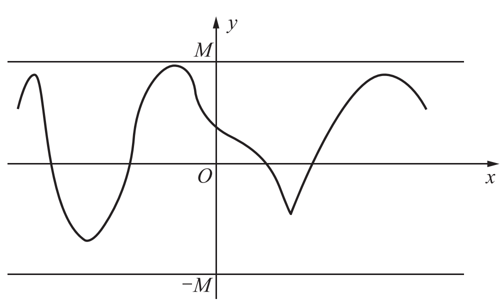

图 1-1-3

解 $y=\ln x$ 的定义域为$(0,+\infty)$. 如图 1-1-4 所示，任取一个正数 M，总会存在一个自变量 c，使得 $\ln c=M$ 成立，即 $P_0(c,M)$ 必是曲线上的一点. 因为 $y=\ln x$ 为增函数，所以当$x>c$时，总有 $\ln x>\ln c$，即 $\ln x>M$ 成立. 因此，对数函数 $y=\ln x$ 在其定义域内为无界函数.

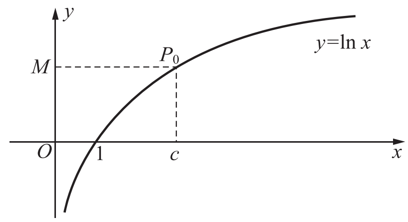

图 1-1-4

注意：

（1）函数 $f(x)$为有界函数时，正数 M 不是唯一的. 例如，取 $M\geqslant 1$，都会有$|\sin x|\leqslant M$成立.

（2）函数的有界性与自变量的定义区间密切相关. 例如，函数 $y=x^2$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$上无界，但 $y=x^2$ 在$(0,1)$内是有界函数.

1.1.3 分段函数

在实际应用中，有些函数关系是不能用一个解析式完全表示的，我们需要将定义域分成若干个子区间，每个子区间会对应不同的解析式，把这些解析式综合起来才能反映一个完整的函数关系，而每个解析式只反映函数关系的一部分.

例 6 某市电话局固定电话每个月的收费标准是这样规定的：每一分钟之内的通话为一个计费单元，称为一次. 每个月不超过 25 次时，只收取月租费 21.6 元；超过 25 次时，除收取月租费 21.6 元外，从第 26 次开始，按每次 0.11 元收取通话费. 试确定电话费与每个月所打的电话次数之间的关系.

解 设打电话 x 次的费用为 y 元.

则 当 $0\leqslant x\leqslant 25$ 时，$y=21.6$；当 $x>25$ 时，$y=21.6+0.11(x-25)$，

即 $$y=\begin{cases}21.6, & 0\leqslant x\leqslant 25,\\ 21.6+0.11(x-25), & x>25.\end{cases}$$

例 7 某电脑公司销售某种产品时规定每件产品单价为 90 元. 为了促进销售，又做出规定，如果顾客一次性购买数量在 100 件以上时，第 100 件以上的产品，每件单价可以打九折. 求销售收入与销售数量之间的函数关系.

解 设销售数量为 x 件，销售收入为 y 元. 依题意，$x\geqslant 0$.

当 $0\leqslant x\leqslant 100$ 时，$y=90x$；

当 $x>100$ 时，$y=90\times 100+(x-100)\times 90\times 90\%=9\ 000+81(x-100)=900+81x$.

综合起来，得到 $$y=\begin{cases}90x, & 0\leqslant x\leqslant 100,\\ 900+81x, & x>100.\end{cases}$$

像这种在定义域内，根据自变量的取值范围不同，而用两个或两个以上解析式分段表示的函数称为分段函数. 分段函数是微积分中比较常见的函数.

1.1.4 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 Z. 如果对于 Z 中的任意一个实数 y，都能在 D 中找到唯一的一个实数x 与之对应，并使得 $f(x)=y$ 成立，就是说，在 Z 中建立了一个

新的函数,这个新的函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$. 对反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说,原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

通常,用 x 表示自变量,y 表示因变量,故常将 $y=f(x)$,$x\in D$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$,$x\in Z$. 显然,反函数的定义域等于直接函数的值域,反函数的值域等于直接函数的定义域,且 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

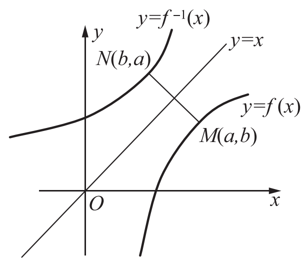

图 1-1-5

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称,如图 1-1-5 所示.

由反函数定义可得求反函数的步骤如下:

(1)从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$;

(2)交换字母 x 与 y 的位置,并注意反函数的定义域为直接函数的值域.

注意:

单调函数必有反函数.

例 8　求 $y=x^3+4$ 的反函数.

解　由 $y=x^3+4$ 解得 $x=\sqrt[3]{y-4}$.

将 x 改写为 y,将 y 改写为 x,得 $y=\sqrt[3]{x-4}$,定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

即 $y=x^3+4$ 的反函数是 $y=\sqrt[3]{x-4}$.

课堂练习

1. 证明:函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调递减,在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.
2. 证明:函数 $y=\cos 2x$ 在实数域内为有界函数.
3. 利用分段函数表示函数 $y=|x-3|$,并画出它的图像.

小结

1. 由函数的定义可知,在 $y=f(x)$ 中,函数是指对应法则 f,但通常我们也说因变量 y 是自变量 x 的函数. 定义域和对应法则是函数的两个要素,而函数的值域是依赖于这两个要素的. 如果两个函数具有相同的定义域和对应法则,那么它们就是相同的函数.

2. 单调性、奇偶性、周期性、有界性从不同角度刻画了函数的整体性质.

3. 分段函数虽然有两个或两个以上的解析式,但是它仍然是一个函数. 不同的解析式刻画了自变量在不同区间上的取值规律.

习题 1.1

A 组

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{4x+5}$　　(2) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$　　(3) $y=\ln|x-1|$

2. 证明：函数 $y=x^3+\sin 2x$ 在实数域$(-\infty,+\infty)$内为奇函数.
3. 证明：函数 $y=\sin 2x$ 在实数域内为有界函数.
4. 根据图像说明函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内是无界函数.
5. 设分段函数 $y=\begin{cases}\cos x, -\pi\leqslant x<0,\\ 5-x, 0\leqslant x\leqslant\pi,\end{cases}$ 求 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$f(0)$以及函数的定义域.

B 组

1. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{x^2-4x-5}$　　(2)$y=\ln(9+2x)+\sqrt{4x-3}$　　(3)$y=\dfrac{\lg x}{\sin x}$

2. 判断函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的奇偶性.

1.2 初等函数

学习目标

1. 理解基本初等函数、复合函数、初等函数的概念.
2. 掌握基本初等函数的性质及其图形.
3. 掌握复合函数的结构.

基本内容

1.2.1 基本初等函数

为了更好地研究函数的性质，我们将幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这五大类函数统称为基本初等函数. 有时为了方便，也把常数函数单独列为一类.

1. 幂函数：$y=x^{\alpha}$（其中 α 为实数）

定义域与指数 α 有关，但不管 α 取何值，幂函数在区间$(0,+\infty)$内总有定义，且它的图像都过点(1,1). 部分幂函数图像如图 1-2-1 和图 1-2-2 所示.

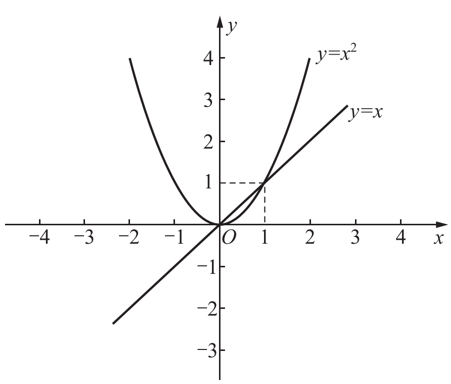

图 1-2-1

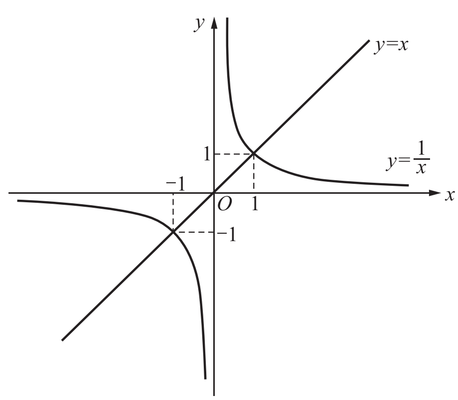

图 1-2-2

2. 指数函数：$y=a^x$（其中 $a>0$ 且 $a\neq1$）

定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$，它的图像都过点$(0,1)$.

从图 1-2-3 可以看到：指数函数 $f(x)=a^x$ 是无界函数，其函数值恒大于 0；当 $0<a<1$ 时，其为单调减函数；当 $a>1$ 时，其为单调增函数. 该函数图像与 y 轴的交点为$(0,1)$.

常用的指数函数是 $y=\mathrm{e}^x$，其中 e 是一个无理数，$\mathrm{e}=2.718\ 28\cdots$.

3. 对数函数：$y=\log_a x$（其中 $a>0$ 且 $a\neq1$）

定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，它的图像都过点$(1,0)$.

从图 1-2-4 中可以看到：对数函数 $y=\log_a x$ 是一个无界函数；当 $0<a<1$ 时，其为单调减函数；当 $a>1$ 时，其为单调增函数. 它的图像与 x 轴交点为$(1,0)$，与 y 轴无交点.

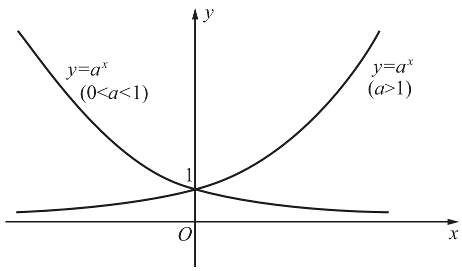

图 1-2-3

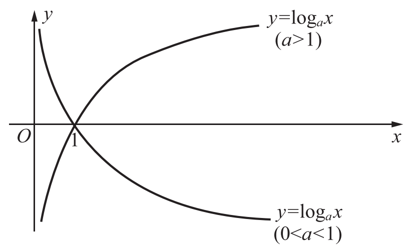

图 1-2-4

以 e 为底的对数函数记作 $y=\ln x$，称为自然对数函数.

对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数.

特别地，$y=\mathrm{e}^x$ 与 $y=\ln x$ 互为反函数.

4. 三角函数：共有六种

（1）正弦函数 $y=\sin x$

定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，是周期函数，最小正周期为 2π，是奇函数、有界函数. 函数图像如图 1-2-5 所示.

（2）余弦函数 $y=\cos x$

定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，是周期函数，最小正周期为 2π，是偶函数、有界函数. 函数图像如图 1-2-6 所示.

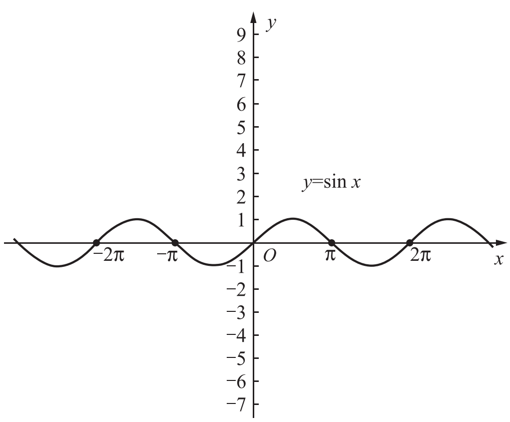

图 1-2-5

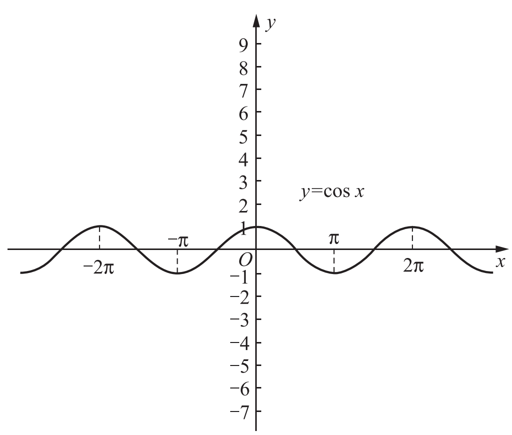

图 1-2-6

(3) 正切函数 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

定义域为 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$（k 为整数）的全体实数，值域为 $(-\infty,+\infty)$，是周期函数，最小正周期为 π，是奇函数、无界函数. 函数图像如图 1-2-7 所示.

(4) 余切函数 $y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

定义域为 $x\neq k\pi$（k 为整数）的全体实数，值域为 $(-\infty,+\infty)$，是周期函数，最小正周期为 π，是奇函数、无界函数. 函数图像如图 1-2-8 所示.

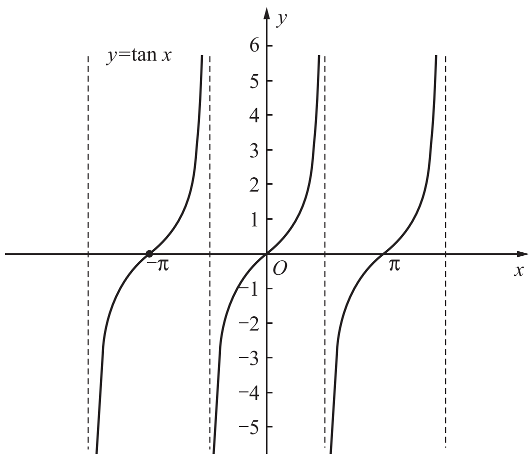

图 1-2-7

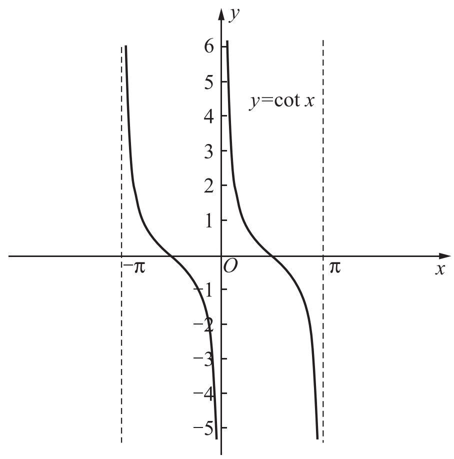

图 1-2-8

(5) 正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$

定义域为 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$（k 为整数）的全体实数，值域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. 函数图像如图 1-2-9 所示.

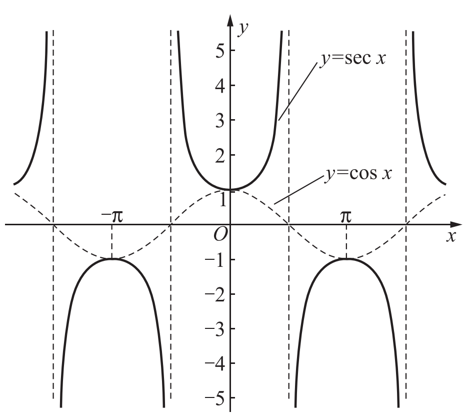

图 1-2-9

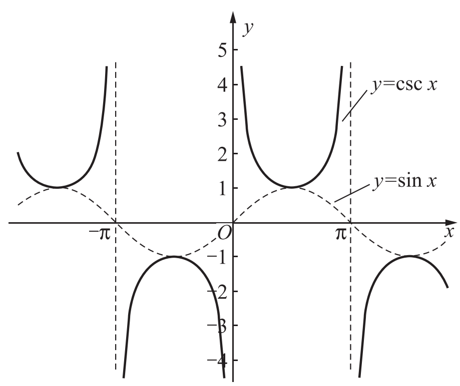

图 1-2-10

(6) 余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$

定义域为 $x\neq k\pi$(k 为整数)的全体实数,值域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. 函数图像如图 1-2-10 所示.

六种三角函数中常用的是 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$.

5. 反三角函数:常用的反三角函数有如下四种

(1) 反正弦函数 $y=\arcsin x$

定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. 函数图像如图 1-2-11 所示.

(2) 反余弦函数 $y=\arccos x$

定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$. 函数图像如图 1-2-12 所示.

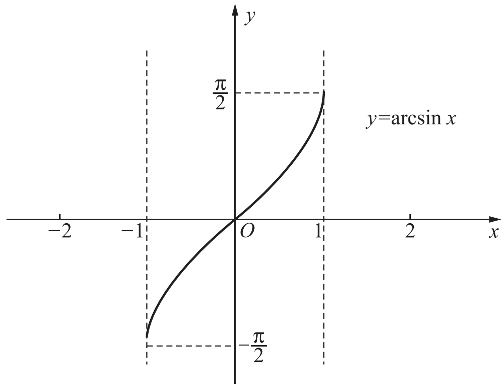

图 1-2-11

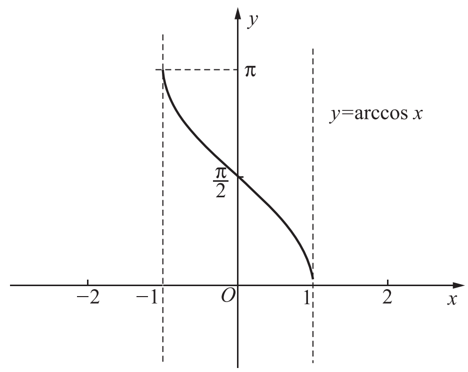

图 1-2-12

(3) 反正切函数 $y=\arctan x$

定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. 函数图像如图 1-2-13 所示.

(4) 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$

定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,\pi)$. 函数图像如图 1-2-14 所示.

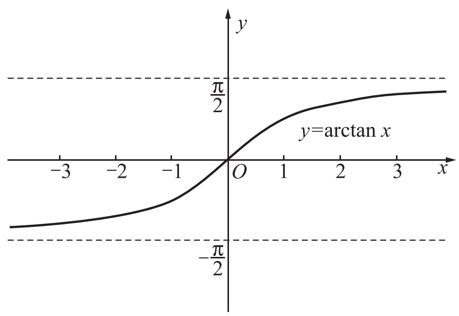

图 1-2-13

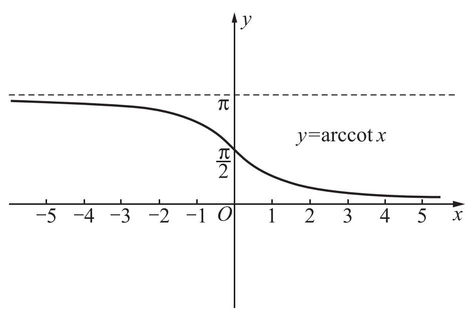

图 1-2-14

1.2.2　复合函数

定义 1.2.1　设有函数 $y=f(u)$,定义域为 D_1;又有函数 $u=g(x)$,定义域为 D_2. 若

对于 D_2 中的任意一个 x，通过 u 有唯一确定的 y 与之对应，则称 y 是 x 的复合函数，记为 $y=f[g(x)]$，u 称为中间变量.

当 $u=g(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域 D_1 的交集不等于空集时，复合函数 $y=f[g(x)]$ 存在 .

例 1 设 $y=f(u)=\ln u$，$u=g(x)=\sin x$，求复合函数 $y=f(g(x))$.

解 $y=f(u)=\ln u$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$u=g(x)=\sin x$ 的值域是 $[-1,1]$，且 $(0,+\infty)\cap[-1,1]=(0,1]\neq\varnothing$，所以复合函数存在.

把函数 $u=g(x)=\sin x$ 代入 $y=f(u)=\ln u$ 中，消去中间变量 u，得到

$y=\ln\sin x$，定义域为 $(2k\pi,(2k+1)\pi)$ （其中 $k\in\mathbf{Z}$）

例 2 分析下列函数的复合过程.

(1) $y=(4x-9)^{100}$　　(2) $y=8^{\cos x}$

解 (1) 设中间变量 $u=4x-9$，则 $y=(4x-9)^{100}$ 是由幂函数 $y=u^{100}$ 与一次函数 $u=4x-9$ 复合而成的.

(2) 设中间变量 $u=\cos x$，则 $y=8^{\cos x}$ 是由指数函数 $y=8^u$ 与余弦函数 $u=\cos x$ 复合而成的.

例 3 分析下列函数的复合过程.

(1) $y=\cos^3 x$　　(2) $y=\cos x^3$　　(3) $y=\sqrt{\lg(4x+7)}$

解 (1) $y=u^3$，$u=\cos x$.

(2) $y=\cos u$，$u=x^3$.

(3) $y=\sqrt{u}$，$u=\lg v$，$v=4x+7$.

复合函数(3)有 u，v 两个中间变量，其中 u 是因变量 y 与 v 之间的中间变量，v 又是 u 与自变量 x 之间的中间变量.

1.2.3 初等函数

函数运算除了复合以外，还有加、减、乘、除等四则运算. 这些运算的结果形成了一类函数，即初等函数.

定义 1.2.2 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤而成，且可用一个解析式表示的函数称为初等函数.

我们前面遇到的函数中，除分段函数以外，都是初等函数. 初等函数是本书研究的主要对象.

课堂练习

1. 函数 $y=\sin 2x$ 是基本初等函数吗？ 函数 $y=2\sin x\cos x$ 是基本初等函数吗？
2. 请比较函数 $y=x^3$ 与函数 $y=3^x$ 有什么不同.
3. 分析下列函数的复合过程.

(1) $y=5^{\cot x}$　　(2) $y=\sqrt{1+x^2}$

小结

1. 基本初等函数是幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这五大类函

数的统称，有时也把常数函数单独列为一类. 必须牢记这些函数的解析式.

2. 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤而成，且能用一个解析式表示的函数称为初等函数. 四则运算与复合步骤是构造初等函数的基本方法.

习题 1.2

A 组

1. 函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是单调函数吗？为什么？
2. 对数函数 $y=\lg x$ 与 $y=\ln x$ 底数有何不同？
3. 下列函数是由哪些函数复合而成的.

(1) $y=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$　　(2) $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\sqrt{x}}$　　(3) $y=\mathrm{e}^{-x}$

B 组

1. 已知函数 $y=f(x)$的定义域为$(0,6)$，求复合函数 $y=f(2x+3)$的定义域.
2. 下列函数是由哪些函数复合而成的.

(1) $y=\ln\sqrt{\sin x}$　　(2) $y=4^{\ln\frac{1}{x}}$　　(3) $y=\cos^3(4x^2-9)$

1.3 经济函数举例

学习目标

了解常用的经济应用函数.

基本内容

1.3.1 利息与贴现

利息是指借款者向贷款者支付的报酬，包括银行向存款者支付的利息，主要有贷款利息、债券利息、贴现利息等几种主要形式. 银行的存贷款利息分为单利和复利两种.

1. 单利计算公式

设初始本金为 y_0 元，银行年利率为 r，第 n 年年末的本利和为 y_n 元. 则有

$$y_n=y_0(1+nr),$$

这就是以年为计息周期的单利计算公式. 银行在计算存款利息时都是用此公式计算.

2. 复利计算公式

设初始本金为 y_0 元，银行年利率为 r，第 n 年年末的本利和为 y_n 元. 则有

$$y_n=y_0(1+r)^n,$$

这就是以年为计息周期的复利计算公式. 银行在计算贷款利息时都是用此公式计算.

例 1　小刚过春节时得到了 2 000 元压岁钱，父母建议他把钱存到银行. 已知一年期

整存整取的年利率为 3.5%，如果这笔压岁钱始终不取出，那么 3 年后分别按单利计算公式和复利计算公式计算的本利和各是多少元？

解 (1) 按单利计算.

由 $y_n=y_0(1+nr)$ 可得，$y_3=2\ 000\times(1+3\times0.035)=2\ 210$(元).

(2) 按复利计算.

由 $y_n=y_0(1+r)^n$ 可得，$y_3=2\ 000\times(1+0.035)^3\approx2\ 217.44$(元).

这里讨论的是存款问题，是以一年作为一个计息周期的. 一般来说，存款利息是按单利来计算的，而贷款利息是按复利来计算的. 国外也有多次付息的方式，这里就不讨论了. 复利问题比单利问题要复杂些，在有了下一章的极限工具后，复利问题才能解释得更加清楚.

3. 贴现

票据持有人（或存款人）想在票据到期以前获取现金时需要将票据出售给银行，而银行则需要从票面金额中扣除一定数额的利息后将其余额支付给票据持有人，这个过程称为贴现.

在复利计算公式 $y_n=y_0(1+r)^n$ 中，本金 y_0 元也称为期初价值或现在价值，简称为现值，本利和 y_n 元也称为期终价值或未来价值，简称为终值. 已知现值 y_0，求终值 y_n，称为利息问题. 已知终值 y_n，求现值 y_0，称为贴现问题. 由复利计算公式 $y_n=y_0(1+r)^n$，容易推得

$$y_0=\frac{y_n}{(1+r)^n}\text{或 } y_0=y_n(1+r)^{-n},$$

这个公式称为贴现公式，其中的年利率 r 又称为年贴现率，而 $\frac{1}{(1+r)^n}$ 称为贴现因子.

例 2 张先生有一张 5 年后到期的 10 万元应收票据，他现在急需现金，需要提前兑付. 已知目前银行的年贴现率为 3.5%，请问张先生提前兑付后能获得现金多少元？

解 依题意，$y_n=100\ 000$，$n=5$，则

$$y_0=\frac{y_n}{(1+r)^n}=\frac{100\ 000}{1.035^5}\approx84\ 197.32(\text{元}),$$

即张先生提前兑付后能获得现金 84 197.32 元.

1.3.2 成本函数

生产一定数量的产品所需要的全部经济投入的费用总额称为产品的总成本，常用 C 表示. 总成本可以分为固定成本和可变成本两部分. 固定成本常用 C_0 表示，一般指生产过程中与产品的生产数量不直接相关的费用，比如厂房、设备、折旧等费用；可变成本常用 C_1 表示，一般指生产过程中与产品的生产数量直接相关的费用，包括原材料、水电、工人的工资等. 在短时期内，固定成本是常数，而可变成本是产品数量 q 的函数，即 $C_1=C_1(q)$. 因此

$$C=C_0+C_1(q).$$

这个函数称为总成本函数.

1.3.3 收益函数

市场上影响某种产品的销售数量与需求数量的因素很多，其中最重要的因素是产品

的价格. 当某种产品的价格由低走高时，生产厂家就会积极组织生产增加供给，而消费者由于购买力下降就会减少购买数量；反过来，当某种产品的价格由高走低时，生产厂家就会降低生产减少供给，而消费者由于购买力上升就会增加购买数量.

若用 p 表示产品的销售价格，用 q 表示产品的销售数量，则价格 p 是数量 q 的函数，记为

$$p=p(q),$$

称为价格函数.

总收益是指生产者出售一定数量的产品所得到的全部收入，常用 R 表示. 显然，总收益 R 等于产品的销售数量 q 与产品的销售价格 p 的乘积，即

$$R=R(q)=p(q)\cdot q,$$

称为总收益函数.

1.3.4　利润函数

总收益减去总成本就得到了总利润. 设 L 表示总利润，则有

$$L=R(q)-C(q),$$

或简写为

$$L=R-C.$$

其中，q 表示产品的销售数量，$R(q)$表示总收益函数，$C(q)$表示总成本函数.

例 3　设某公司生产一种产品的固定成本为 10 000 元，生产每件产品需增加成本 20 元，价格函数为 $p=900-q$，求总利润函数.

解　总成本函数为 $C=10\ 000+20q$，总收益函数为 $R=p(q)\cdot q=900q-q^2$，

所以，总利润函数为 $L=R-C=-q^2+880q-10\ 000$.

课堂练习

1. 小强准备将 5 000 元现金存入银行，存期为 2 年，如果一年期存款年利率为 3%，那么存款到期后小强获得的本利和是多少元？

2. 生产某种产品的固定成本为 $a(a>0)$元，每生产 1 千克产品需增加的可变成本为 $b(b>0)$元，求总成本函数和平均成本函数.

小结

1. 以年为计息周期的单利计算公式为 $y_n=y_0(1+nr)$. 以年为计息周期的复利计算公式为 $y_n=y_0(1+r)^n$. 以复利计算的贴现公式为 $y_0=\dfrac{y_n}{(1+r)^n}$或 $y_0=y_n(1+r)^{-n}$.

2. 总成本函数为 $C=C_0+C_1(q)$，总收益函数为$R=R(q)=p(q)\cdot q$，总利润函数为 $L=R(q)-C(q)$或简写为 $L=R-C$.

习题 1.3

A 组

1. 张芳从银行贷款 10 000 元购买了一台彩电，约定三年后还清所有贷款. 已知银行的年贷款利率为 5%，并以一年为一个计息周期. 求贷款到期后张芳需要还款多少元.

2. 设总成本函数为 $C(q)=9q+7$，总收益函数为 $R(q)=18q-0.01q^2$. 求总利润函数和平均利润函数.

B 组

假设银行三年期零存整取的年利率为 3.6%，且每个月都按时存入银行 1 000 元，求存款到期后本金共计多少元？利息共计多少元？

本章小结

1. 函数

若对于非空实数集合 D 中的任意一个实数 x，按照某一确定的对应法则 f，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称对应法则 f 为定义在集合 D 上的函数，记为 $y=f(x)$. 通常我们也说因变量 y 是自变量 x 的函数. 定义域和对应法则是函数的两个要素.

2. 初等函数

基本初等函数是幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等函数的统称，是形式上最为简单的函数，是构造初等函数的基础. 基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤且能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

分段函数是一种特殊的函数表现形式，但在微积分中也是常见的一种函数.

3. 函数的整体性质

单调性、奇偶性、周期性、有界性.

复习题 1

一、单项选择题

1. 下列函数中属于基本初等函数的是（　　）

A. $y=x^2+\cos x$　　B. $y=3x^3$　　C. $y=\cos x$　　D. $y=\cos 2x$

2. 下列函数中属于复合函数的是（　　）

A. $y=x^2+\cos x$　　B. $y=3x^3$　　C. $y=\cos x$　　D. $y=\cos 2x$

3. 下列函数中属于奇函数的是（　　）

A. $y=x^2+\cos x$　　B. $y=3x^3$　　C. $y=\cos x$　　D. $y=\cos 2x$

二、填空题

1. 设 $y=f(u)=\tan u, u=g(x)=x^4$，则复合函数 $f[g(x)]=$__________.
2. 函数 $y=\ln(4+\ln x)$的复合过程为 $y=$__________，$u=$__________.
3. 若函数 $f(x)$的定义域为$(1,4)$，那么函数 $f(x^2)$的定义域为__________.

三、解答题

1. 求函数 $y=\dfrac{x-2}{x^2-x}$的定义域.
2. 设分段函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x<0, \\ \dfrac{1}{2}, & x=0, \\ x^2, & x>0, \end{cases}$求 $f(-1), f(0), f(1)$及定义域.
3. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，求 $f(-2), f\left(\dfrac{1}{x}\right)$以及复合函数 $f[f(x)]$.
4. 分析下列函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt[3]{5x-7}$　　(2) $y=\lg^2(x+\sin x)$　　(3) $y=(2\ln x+3\tan x)^7$

5. 某公司生产的某款笔记本电脑，市场售价为 6 500 元. 预计年产量为 10 000 台时可全部售出. 如果年产量超过 10 000 台，那么销售压力就会增加. 为把电脑销售出去，不得不增加广告费支出，广告费平均分摊到超产的每台电脑上为 128 元，但即使这样，年产量也不能超过 15 000 台. 假设实际的年产量为 x 台，实际的年销售收益为 y 元，试建立 y 与 x 之间的函数关系，并求出实际年产量为 9 000 台和 12 000 台时的销售收益各是多少元?

拓展与实践

函数概念的演变小史

函数概念是数学中最基本的概念之一. 函数概念的产生比较晚，至今只有三百余年历史.

在公元 16 世纪之前，数学上占统治地位的是常量数学，其特点是用孤立、静止的观点去研究事物. 具体的函数关系在数学中比比皆是，但还没有一般的函数概念. 16 世纪，在欧洲向新的资本主义生产方式过渡过程中，迫切需要天文知识和力学原理. 当时，自然科学研究的重心转向对运动、对各种变化过程和变化着的量之间依赖关系的研究. 数学研究也从常量数学转向了变量数学. 数学研究的这一转折主要是由法国哲学家兼物理学家、数学家笛卡尔(Rene Descartes，1596—1650)完成的. 他在《几何学》一文中引入了变量思想，“变量”在此称为“未知和未定的量”，同时引入了两个变量之间的相依关系. 这便是函数概念的萌芽. 17 世纪，在对各种各样运动的研究中，人们愈来愈感到需要有一个能准确表达各种量之间关系的数学概念. 经过深思熟虑，人们从笛卡尔的变量思想中得到启示，从而引出了函数概念. 据考证，17 世纪中

叶,微积分的创始人之一——德国哲学家兼数学家莱布尼兹(Leibniz,1646—1716)最先使用函数(function)这个名词.不过,他指的是变数 x 的幂,即 x^2,x^3,…,后来才逐步扩展到多项式函数、有理函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数以及由它们的四则运算、各种复合所形成的初等函数.这些函数都是具体的,都有解析表达式,并且和曲线紧密联系在一起.那时的函数就是表示任何一个随着曲线的点的变动而变化的量.至此,还没有函数的一般定义.

18 世纪初,瑞士数学家约翰·伯努利(Jean Bernoulli,1667—1748)最先摆脱具体的初等函数的束缚,给函数一个抽象的不用几何形式的定义:"一个变量的函数是指由这个变量和常量的任何一种方式构成的一个量."瑞士数学家约翰·伯努利的学生欧拉(Euler,1709—1783)则更明确地说:"一个变量的函数是该变量和常数以任何一种方式构成的解析表达式."函数之间的区别在于构成函数的变量与常量的组合方式的不同.欧拉最先把函数的概念写进了教科书.在约翰·伯努利和欧拉看来,具有解析表达式是函数概念的关键所在.

1734 年,欧拉用记号 $y=f(x)$ 表示变量 x 的函数,其中的 f 取自"function"的第一个字母.

18 世纪中期,偏微分方程中的弦振动问题引起了关于函数概念的争论,迫使数学家接受一个更广泛的概念.1755 年欧拉给函数下了一个新的定义:"如果某些变量以这样一种方式依赖于另一些变量,即当后面的变量变化时,前面的变量也随之变化,那么称前面的变量为后面的变量的函数."

法国数学家傅立叶(Fourier,1768—1830)的工作更广泛地揭示了函数究竟是什么.他的工作动摇了 18 世纪的观念,那种仅将函数视为解析式来揭示函数关系本质的局限性终于消除了.

19 世纪 20 年代,微积分严格理论的奠基者,法国数学家柯西(Cauchy,1789—1857)的函数概念,可以说是现代函数概念的基础.他认识到函数是变量与变量之间的一种关系,但不足之处是仍然没有摆脱"表达式"之说.

1837 年,德国数学家黎曼(Riemann,1826—1866)和狄利克雷(Dirichlet,1805—1859)在总结柯西工作的基础上,又分别引出新的定义。

黎曼的定义:"对于 x 的每一个值,y 总有完全确定的值与它对应,而不论建立 x,y 之间的对应方法如何,均将 y 称为 x 的函数."

狄利克雷的定义:"如果对于给定区间上的每一个确定的 x 值,y 都有唯一的一个或多个确定的值与它对应,那么 y 就是 x 的函数."至于在整个区间上 y 按照一种还是多种规律依赖于 x ,或者 y 依赖于 x 是否可用数学运算来表达,那都是无关紧要的.这是至今最常用的函数定义.

18 世纪以来,随着微积分的发展,函数概念不断变化,经过二百多年的演变,函数概念逐步清晰与稳定,并引入了映射概念.其一般定义为:"设集合 X、Y,如果 X 中每一个元素 x 都有 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应,那么我们就把此对应叫做从集合 X 到集合 Y 的映射.记作 $f:X\rightarrow Y$,$y=f(x)$."

20 世纪初,英国数学家哈代(G. H. Hardy,1877—1947)更明确指出:函数的本质属性在于,y 和 x 之间存在某种关系,使得 y 的值总是对应着某些 x 的值.

随后,美国数学家维布伦(Veblen, Oswald,1880—1960)用集合定义了变量与函数."变量是代表某个集合中任一元素的记号.""变量 y 的集合与另一个变量 x 的集合之间,如果存在着对于 x 的每一个值,y 有确定的值与之对应,那么 y 叫做 x 的函数."这个定义比此前的定义更合理、更确切,这是一个比较完整的函数概念.

1939 年,法国的尼古拉·布尔巴基(Nicolas Bourbaki)学派用集合之间的映射定义了函数:"设 E 和 F 是两个集合,E 中的每一个变元 x 和 F 中的每一个变元 y 之间的一个关系 f 称为函数,如果对每一个 $x\in E$,都存在唯一的 $y\in F$,它们满足给定的关系."记作 $f:E\to F$,或者记作 $E\xrightarrow{f}Y$.

在布尔巴基的定义中,E 和 F 不一定是数的集合.他强调函数是集合之间的一个映射.因此,他所定义的函数更加广泛.

现在常用的函数概念,也是中学数学中的函数概念,把变量局限于实数范围:

设 x 表示某数集 D 中的变元.对 D 中每一个 x,按一定的法则有唯一的实数 y 与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$.称 x 为自变量,D 叫做函数的定义域,f 表示对应法则,y 的取值范围叫做函数的值域.

20 世纪以来,函数概念不断扩充,函数不仅是变数,还可以是其他变化着的事物.还出现了所谓广义函数以及函数的函数等等.但大体上可被布尔巴基的函数概念覆盖.以研究函数为己任的分析学,成为数学的三大基本分支之一,形成几何、代数、分析三足鼎立的局面.在分析学中,函数论占有重要地位,它又划分为实函数论与复函数论两大部分.

我国最早使用"函数"一词的是清朝数学家李善兰.1859 年李善兰在上海与英国人伟烈亚力合作译英国数学著作《代数学》时译道:"凡式含天,为天之函数",首次将"function"译成"函数".中国古代以天、地、人、物表示未知数,"函"字即"含有""包含"之意.

函数概念的演变过程,就是函数内涵在不断地被挖掘、丰富和精确刻划的历史过程;同时看出,数学概念并非生来就有、一成不变的,而是人们在对客观世界深入了解过程中得到并不断加以发展的,以适应新的需要.